1. Пусть x_n и y_n — последовательности вещественных чисел. Пусть $X = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $Y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, а функции $N_x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $N_y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ таковы, что для любого $\varepsilon > 0$ при $n > N_x(\varepsilon)$ выполнено $|x_n - X| < \varepsilon$, а при $n > N_y(\varepsilon)$ выполнено $|y_n - Y| < \varepsilon$.

   Найдите предел $Z = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$ и функцию $N_z\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такую, что для любого $\varepsilon > 0$ при $n > N_z(\varepsilon)$ выполнено $|z_n - Z| < \varepsilon$, если последовательность z_n задана соотношением:

   (а) (0.5) $z_n = x_n + y_n$;

   (б) (0.5) $z_n = x_n^2$;

   (в) (1) $z_n = x_n y_n$;

   (г) (1) $z_n = \frac{1}{y_n}$ (считать $Y \neq 0$);

   (д) (1) $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ (считать $Y \neq 0$);

   (е) (1) $z_n = x_n^2 y_n + y_n^2 x_n$;

   (ж) (1) $z_n = \frac{x_n^2 y_n + y_n^2 x_n}{1+(x_n+y_n)^2}$;

2. (2 балла) Докажите, что последовательность $x_n = \sqrt{n} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}$ имеет конечный предел.

3. (3 балла) Докажите, что последовательность вещественных чисел, удовлетворяющая рекуррентному соотношению $x_{n+1} = x_n \sin x_n$, сходится.

4. (4 балла) Докажите, что если последовательность x_n имеет предел a, то последовательность $y_n = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ тоже имеет предел a.