Задания

1 марта 2017 г.

1. Напомню, что категория называется категорией предпорядка, если для любых объектов A и B в ней существует максимум один морфизм между A и B. Чему в категории предпорядка соответствуют следующие конструкции?

   (a) Терминальные объекты.

   (b) Произведения объектов.

2. Пусть в категории $\mathbf{C}$ существует терминальный объект 1. Докажите, что для любого объекта A в $\mathbf{C}$ существует произведение $A \times 1$.

3. Докажите, что любой морфизм из терминального объекта является мономорфизмом.

4. Пусть в категории $\mathbf{C}$ существует терминальный объект 1 и некоторый морфизм $1 \to B$. Докажите, что любая проекция $\pi_1 : A \times B \to A$ является эпиморфизмом.

5. Докажите, что в $\mathbf{Ab}$ существуют все произведения.

6. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории $\mathbf{C}$ выполнены следующие утверждения:

   (a) Для любого объекта A существует изоморфизм $A^1 \simeq A$.

   (b) Для любых объектов A, B и C существует изоморфизм $A^{B\times C} \simeq (A^B)^C$.

7. Определите в произвольной декартово замкнутой категории комбинаторы K и S, то есть следующие морфизмы:

$$K : A \to A^B$$
$$S : (C^B)^A \to (C^A)^{(B^A)}$$

8. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что функция suc должна быть инъективной. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм suc является расщепленным мономорфизмом.

9. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что ни для какого x не верно, что $0 = suc(x)$. В произвольной декартово замкнутой категории это может быть верно, но только если она является категорией предпорядка. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.

   (a) $\mathbf{C}$ – категория предпорядка.

   (b) В $\mathbf{C}$ терминальный объект является объектом натуральных чисел.

   (c) В $\mathbf{C}$ существует объект натуральных чисел, такой что для любого $x : 1 \to \mathbb{N}$ верно, что $zero = suc \circ x$.

   (d) В $\mathbf{C}$ существует объект натуральных чисел, такой что для некоторого $x : 1 \to \mathbb{N}$ верно, что $zero = suc \circ x$.

10. Определите в произвольной декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм сложения $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[d, "\langle zero \circ !_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle"'] \arrow[dr, "id_{\mathbb{N}}"] & \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "+"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "suc \times id_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "suc"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "+"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

Докажите, что сложение коммутативно и ассоциативно, то есть, что коммутируют следующие диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "\langle \pi_2, \pi_1 \rangle"] \arrow[dr, "+"'] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "+"] \\
& \mathbb{N} \times \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "+ \times id_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \arrow[r, "id_{\mathbb{N}} \times +"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "+"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[rr, "+"'] & & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

11. Докажите, что если мы добавим в лямбда исчисление тип натуральных чисел $\mathbb{N}$ с термами и аксиомами, приведенными ниже, то такое лямбда исчесление можно проинтерпретировать в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел.

$$
\frac{}{\Gamma \vdash zero : \mathbb{N}} \qquad \frac{\Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash suc(n) : \mathbb{N}}
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash z : D \qquad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D \qquad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash rec(z, s, n) : D}
$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \qquad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D}{\Gamma \vdash rec(z, s, zero) \equiv z : D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \qquad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D \qquad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash rec(z, s, suc(n)) \equiv s[x := n, r := rec(z, s, n)] : D}$$

В качестве примера к предпоследней задаче давайте сконструируем морфизм умножения. Это морфизм $*$, удовлетворяющий следующим свойствам:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "!_{\mathbb{N}}"] \arrow[d, "\langle zero \circ !_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle"'] & 1 \arrow[d, "zero"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "*"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "id_{\mathbb{N}} \times \langle id_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle"] \arrow[d, "suc \times id_{\mathbb{N}}"] & \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \arrow[r, "\simeq"] & (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \arrow[r, "* \times id_{\mathbb{N}}"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "+"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[rrr, "*"'] & & & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

Чтобы его сконструировать возьмем в определении натуральных чисел $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. В качестве $z : 1 \to X$ возьмем морфизм, по каррированию соответствующий функции $\mathbb{N} \to 1 \xrightarrow{zero} \mathbb{N}$. В качестве $s : X \to X$ возьмем морфизм, по каррированию соответствующий следующей функции:

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \xrightarrow{id_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \times \langle id_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \simeq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \xrightarrow{ev \times id_{\mathbb{N}}} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}.$$

Тогда коммутирование двух частей диаграммы в определение $\mathbb{N}$ эквивалентно коммутированию двух диаграмм в определении $*$.