$\boxed{\textbf{ML 1.}}$ Пусть $L_1, L_2 \in \mathbf{NP}$. Принадлежит ли объединение этих языков $\mathbf{NP}$? А пересечение?

$\boxed{\textbf{ML 2.}}$ Покажите, что язык выполнимых формул в 2-КНФ принадлежит классу $\mathbf{P}$.

$\boxed{\textbf{ML 3.}}$ Рассмотрим язык графов с гамильтоновым циклом. Пусть у вас есть алгоритм A, который разрешает данный язык за полиномиальное время. Предъявите алгоритм, который по графу выдает гамильтонов цикл за полиномиальное время.

$\boxed{\textbf{ML 4.}}$ Пусть функции $f, g : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ можно посчитать с использованием $O(\log(n))$ памяти (память считается только на рабочих лентах, входная лента доступна только для чтения, а по выходной ленте головка машины Тьюринга движется только слева направо). Докажите, что функцию $f(g(x))$ можно также посчитать с использованием $O(\log(n))$ памяти.

$\boxed{\textbf{ML 5.}}$ Докажите $\mathbf{NP}$-полноту следующего языка: язык выполнимых формул в КНФ, где каждый клоз либо хорновский, либо состоит из двух литералов.

$\boxed{\textbf{ML 6.}}$ Докажите $\mathbf{NP}$-полноту следующих задач:

а) на вход подается пара графов (G_1, G_2), необходимо определить, изоморфен ли граф G_2 подграфу графа G_1 (подсказка для одного из решений, вершины графа G_1 кодируют подстановку для группы переменных из булевой формулы);

б) на вход подается граф G_1 и число $k \le |G|$, необходимо определить, есть ли в графе G клика размера k;

в) на вход подается граф G_1 и число $k \le |G|$, необходимо определить, существует такое ли $V \subseteq G$, что $|V| \le k$ и все ребра графа G инцидентны хотя бы одной вершине из множества V.

$\boxed{\textbf{ML 7.}}$ Докажите, что:

а) что число n простое тогда и только тогда, когда для каждого простого делителя q числа $n-1$ существует $a \in 2, 3, \ldots, n-1$ при котором $a^{n-1} = 1 \; mod \; n$, а $a^{\frac{n-1}{q}} \ne 1 \; mod \; n$;

б) язык простых чисел лежит в $\mathbf{NP}$.

ML 47. Пусть T — теория (множество замкнутых формул) следующего языка: $\{<, R, B\}$, где R (red) и B (blue) унарные предикаты. T содержит все аксиомы плотного линейного порядка без первого и последнего элемента, а также:

- $\forall xy\ \exists zw\ (x < z < w < y\ \wedge\ R(z)\ \wedge\ B(w))$;
- $\forall x\ (R(x)\ \vee\ B(x))$;
- $\forall x\ (R(x) \leftrightarrow \neg B(x)$.

Докажите, что любые интерпретации данной теории на счетном множестве изоморфны.

ML 48. Постройте две неизоморфные интерпретации теории $\mathtt{Th}(\mathbb{Q}, <, =)$ (плотный линейный порядок без первого и последнего элемента) мощности континуум.

ML 49. В алгебре вам доказывали, что если K — некоторое поле, а многочлен $f \in K[x]$ неприводим, то существует K' надполе поля K, в котором многочлен f имеет корень (в качестве поля K' можно взять $K[x]/{<}f{>}$, это кольцо является полем как фактор-кольцо по максимальному идеалу). С помощью теоремы о компактности покажите, что для всякого поля K существует его надполе K' такое, что каждый неконстантный многочлен с коэффициентами из K имеет корень в K'.

ML 51. Будет ли теория $\mathtt{Th}((\mathbb{Z}, <, =))$ конечно аксиоматизируемой.

ML 52. Будет ли теория $\mathtt{Th}((\mathbb{N}, <, =))$ конечно аксиоматизируемой.

ML 53. Докажите, что:

а) в интерпретации $(\mathbb{Q}, =, <, +,$ рациональные константы$)$ допустима элиминация кванторов;

б) интерпретации $(\mathbb{Q}, =, <, +,$ рациональные константы$)$ и $(\mathbb{R}, =, <, +,$ рациональные константы$)$ элементарно эквивалентны;

в) если единичный квадрат разрезан на несколько меньших квадратов, то все они имеют рациональные стороны (подсказка: используйте предыдущие пункты и покажите единственность решения системы уравнений).