

Математическая логика и теория вычислимости

Лекция 6. Логика предикатов первого порядка

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

13.03.2017

- 1 Формулы
- 2 Интерпретации, оценки, значения
- 3 Выразимые предикаты
- 4 Пример: язык элементарной арифметики

- 1 Формулы
- 2 Интерпретации, оценки, значения
- 3 Выразимые предикаты
- 4 Пример: язык элементарной арифметики

- Логика высказываний достаточно бедна, высказывания в ней представляют собой элементарные неделимые объекты без внутренней структуры.
- Хотелось бы уметь формализовывать утверждения вроде
Для любого x существует такой y , что их произведение даёт единичный элемент I .
- Мы приблизительно представляем, как это делать:

$$\forall x \exists y (x \times y = I)$$

- Нужно, однако, точно описать формализм и задать подходящую семантику.

- n -арным *отношением* R , заданным на множестве M , называют некоторое подмножество декартова произведения $M \times M \times \dots \times M = M^n$.
- Пример: бинарное отношение равенства $=$ в \mathbb{N} . Ему принадлежат все пары вида $\langle x, x \rangle$ и только они.
- Для конкретных бинарных отношений принято использовать инфиксную запись. Пишут $3 = 3$, а не $\langle 3, 3 \rangle \in =$.
- n -арным *предикатом* P , заданным на множестве M , называют функцию $P : M^n \rightarrow \mathbb{B}$.
- Каждый предикат естественным образом порождает отношение, определяемое как прообраз T .
- Наоборот, каждому отношению можно сопоставить предикат, выступающий в роли характеристической функции этого отношения.

- Начнем формализацию. Что нам потребуется?
- Набор *индивидуальных (предметных) переменных*: x, y, z, \dots
- Набор *функциональных символов* с заданной арностью:
 f^n, g^m, h^k, \dots
 - *Арность (валентность)* — это натуральное число, указывающее количество аргументов, которые требуются при использовании функционального символа.
 - В нашем примере использовался (инфиксный) функциональный символ \times арности 2.
 - Арность \times^2 указывают только при первоначальном описании формализма.
 - Функциональные символы арности 0 называют *константами* (в нашем примере это I).
- Предполагается, что индивидуальные переменные и функциональные символы берутся из разных, непересекающихся наборов.

- Понятие *терма* (для заданных индивидуальных переменных и функциональных символов) определяется индуктивно:
 - индивидуальная переменная есть терм;
 - константа есть терм;
 - если t_1, t_2, \dots, t_n — термы, а f — функциональный символ арности $n > 0$, то $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ есть терм.
- Пример терма:

$$x \times (y \times I)$$

- Набор *предикатных символов* с заданной арностью:
 P^n, Q^m, R^k, \dots
 - В нашем примере использовался (инфиксный) предикатный символ = арности 2.
 - Арность =² указывают только при первоначальном описании формализма.
 - Предикатных символов арности 0 (достаточно двух: “истинный” – \top и “ложный” \perp).

- Набор функциональных и предикатных символов с заданной арностью называется *сигнатурой*.

- Пример сигнатуры:

$$\times^2, I^0, =^2$$

- Предикатный символ =² часто входит в сигнатуру и называется *равенством*.
- Часто имеется договоренность о приоритете инфиксных символов сигнатуры (реже — об ассоциативности).

- *Атомарная формула* для заданной сигнатуры это:
 - $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, где P — предикатный символ арности $n > 0$, а t_1, t_2, \dots, t_n — термы;
 - предикатный символ арности 0.
- Пример атомарной формулы:

$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$$

- Атомарные формулы используют в логике предикатов аналогично пропозициональным переменным в логике высказываний.

Формулы первого порядка

- Понятие *формулы* для заданной сигнатуры определяется индуктивно:
 - атомарная формула есть формула;
 - если φ — формула, то $\neg\varphi$ — формула;
 - если φ и ψ — формулы, то $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ — формулы;
 - если φ — формула, а x — индивидуальная переменная, то $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$ — формулы.
- Пример формулы первого порядка:

$$\forall x\exists y((x \times y = 1) \wedge (y \times x = 1))$$

- Кванторы имеют высший приоритет, такой же как \neg .
(Бывают другие договоренности.)

$$\forall x\neg P(x) \wedge Q(x) \rightarrow \neg R(x)$$

Здесь P , Q , R — предикатные символы.

- Множество *свободных переменных (параметров)* $FV(A)$ формулы A определяется индуктивно:
 - все переменные, входящие в термы, — свободные;
 - свободные переменные атомарной формулы — это свободные переменные входящих в нее термов;
 - $FV(\neg\varphi) = FV(\varphi)$;
 - $FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$;
 - $FV(\varphi \vee \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$;
 - $FV(\varphi \rightarrow \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$;
 - $FV(\forall x\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$;
 - $FV(\exists x\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$.
- Переменные, не являющиеся свободными, называют *связанными*. Их множество обозначают $BV(A)$.

- Одна и та же переменная может иметь и связанные и свободные вхождения, а также оказаться связанной несколько раз:

$$\forall x \neg P(x) \wedge Q(x) \rightarrow \neg R(x)$$

$$\neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\forall x (\exists x P(x) \rightarrow Q(x, x))$$

- Формула, в которой нет свободных вхождений переменных, называется *замкнутой формулой (суждением)*.

- Сигнатура теории групп:
 - функциональные символы $\times^2, I^0, \text{inv}^1$;
 - предикатный символ $=^2$.
- Аксиомы:

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \forall z ((x \times y) \times z = x \times (y \times z)) \\ \forall x ((x \times I = x) \wedge (I \times x = x)) \\ \forall x ((x \times \text{inv}(x) = I) \wedge (\text{inv}(x) \times x = I))\end{aligned}$$

- Сигнатура теории групп (версия 2):
 - функциональные символы \times^2, I^0 ;
 - предикатный символ $=^2$.
- Аксиомы:

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \forall z ((x \times y) \times z = x \times (y \times z)) \\ \forall x ((x \times I = x) \wedge (I \times x = x)) \\ \forall x \exists y ((x \times y = I) \wedge (y \times x = I))\end{aligned}$$

- 1 Формулы
- 2 Интерпретации, оценки, значения**
- 3 Выразимые предикаты
- 4 Пример: язык элементарной арифметики

- Пусть задана сигнатура. Задать ее *интерпретацию* значит
 - указать непустое множество D , называемое *носителем* интерпретации;
 - для каждого функционального символа f^n сигнатуры задать функцию подходящей арности $[f] : D^n \rightarrow D$;
 - для каждого предикатного символа P^n сигнатуры задать предикат подходящей арности $[P] : D^n \rightarrow \mathbb{B}$.
- Если в сигнатуру входит знак равенства, то интерпретация, в которой ему ставится в соответствие совпадение элементов D , называется *нормальной*.
- **Пример.** Интерпретация сигнатуры теории групп:
 - носитель \mathbb{Z} ;
 - $[\times] = + : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$;
 - $[I] = 0 : \mathbb{Z}$;
 - $[\text{inv}] = - : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$;
 - $[=] = = : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{B}$.

Получили группу целых чисел с операцией сложения.

- Пусть задана сигнатура и ее интерпретация.
- Задать ее *оценку* значит задать отображение π , ставящее в соответствие каждой индивидуальной переменной некоторый элемент носителя интерпретации.
- Такой элемент называют *значением переменной* при данной оценке.
- Например, для нашей интерпретации сигнатуры теории групп как группы целых со сложением можно задать оценку

$$\pi(x) = -3$$

$$\pi(y) = 42$$

$$\pi(z) = 8$$

- Пусть задана интерпретация сигнатуры и оценка π .
- *Значение термина* τ (нотация $[\tau]_{\pi}$) является элементом носителя и определяется индуктивно:
 - значение индивидуальной переменной напрямую определяется оценкой $[x]_{\pi} = \pi(x)$;
 - значение константы не зависит от оценки и определяется интерпретацией;
 - если терм τ имеет вид $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, где t_1, t_2, \dots, t_n — термы, то

$$[\tau]_{\pi} = [f]([t_1]_{\pi}, [t_2]_{\pi}, \dots, [t_n]_{\pi})$$

- Пример. Для оценки π с предыдущего слайда:

$$[\text{inv}(x) \times (y \times I)]_{\pi} = -(-3) + (42 + 0) = 45$$

Значение формулы

- Пусть задана интерпретация сигнатуры и оценка π .
- *Значение формулы* φ (нотация $[\varphi]_{\pi}$) является элементом $\mathbb{B} = \{F, T\}$ и определяется индуктивно:

- если φ — атомарная формула $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, то ее значение

$$[\varphi]_{\pi} = [P]([t_1]_{\pi}, [t_2]_{\pi}, \dots, [t_n]_{\pi})$$

- $[\top]_{\pi} = T$, $[\perp]_{\pi} = F$ независимо от интерпретации и оценки;
 - $[\neg\varphi]_{\pi} = \neg [\varphi]_{\pi}$;
 - $[\varphi \wedge \psi]_{\pi} = [\varphi]_{\pi} \wedge [\psi]_{\pi}$;
 - $[\varphi \vee \psi]_{\pi} = [\varphi]_{\pi} \vee [\psi]_{\pi}$;
 - $[\varphi \rightarrow \psi]_{\pi} = [\varphi]_{\pi} \rightarrow [\psi]_{\pi}$;
 - (про кванторы чуть позже)
- Пример. Для оценки π с пред-предыдущего слайда:

$$\begin{aligned} & [x \times (y \times z) = (x \times y) \times z]_{\pi} = \\ = & ((-3) + (42 + 8) = (-3 + 42) + 8) = (47 = 47) = T \end{aligned}$$

Значение формулы с квантором существования \exists

- Пусть d — элемент носителя интерпретации D , а π — некоторая оценка.
- Обозначим через $\pi, x := d$ оценку, которая совпадает с π всюду, кроме значения переменной x , которое при этой оценке d .
- Значение формулы с квантором \exists определяется как дизъюнкция по всем значениям носителя

$$[\exists x \varphi]_{\pi} = \bigvee_{d \in D} [\varphi]_{\pi, x := d}$$

- Пример.

$$[\exists x(x \times x = 8)]_{\pi} = (0 + 0 = 8) \vee (1 + 1 = 8) \vee \\ \vee (-1 + (-1) = 8) \vee (2 + 2 = 8) \vee (-2 + (-2) = 8) \vee \dots = ?$$

Значение формулы с квантором всеобщности \forall

- Значение формулы с квантором \forall определяется как конъюнкция по всем значениям носителя

$$[\forall x \varphi]_{\pi} = \bigwedge_{d \in D} [\varphi]_{\pi, x := d}$$

- Пример.

$$\begin{aligned} [\forall x (x \times I = x)]_{\pi} &= (0 + 0 = 0) \wedge (1 + 0 = 1) \wedge \\ &\wedge (-1 + 0 = -1) \wedge (2 + 0 = 2) \wedge (-2 + 0 = -2) \wedge \dots = T \end{aligned}$$

- Значение формулы определяется значениями ее свободных переменных.
- Значение замкнутой формулы не зависит от оценки и полностью определяется выбором интерпретации.

- 1 Формулы
- 2 Интерпретации, оценки, значения
- 3 Выразимые предикаты**
- 4 Пример: язык элементарной арифметики

- Пусть дана сигнатура σ и ее интерпретация с носителем D .
- Пусть дана формула φ , такая что $FV(\varphi) = \{x_1, \dots, x_k\}$.
- Ее истинность зависит только от значений свободных переменных x_1, \dots, x_k (параметров). Таким образом формула *выражает* некоторый k -арный предикат на D .
- Все предикаты, которые могут быть получены таким способом, называются *выразимыми* в данной сигнатуре. Подмножества D^k , соответствующие этим предикатам, называют *выразимыми множествами*.
- Объединение, пересечение и проекция выразимых множеств являются выразимыми.

- Сигнатура:
 - функциональный символ S^1 ;
 - предикатный символ $=^2$.
- Интерпретация (нормальная):
 - носитель: \mathbb{N} ;
 - функциональный символ: $[S] = \lambda x. x + 1$.
- Предикат «быть больше трех»:

- Сигнатура:
 - функциональный символ S^1 ;
 - предикатный символ $=^2$.
- Интерпретация (нормальная):
 - носитель: \mathbb{N} ;
 - функциональный символ: $[S] = \lambda x. x + 1$.
- Предикат «быть больше трех»:

$$\exists y(x = S(S(S(y))))$$

- Предикат «быть нулем»:

- Сигнатура:
 - функциональный символ S^1 ;
 - предикатный символ $=^2$.
- Интерпретация (нормальная):
 - носитель: \mathbb{N} ;
 - функциональный символ: $[S] = \lambda x. x + 1$.
- Предикат «быть больше трех»:

$$\exists y(x = S(S(S(y))))$$

- Предикат «быть нулем»:

$$\neg \exists y(x = S(y))$$

- 1 Формулы
- 2 Интерпретации, оценки, значения
- 3 Выразимые предикаты
- 4 Пример: язык элементарной арифметики

- Сигнатура языка элементарной арифметики:
 - функциональные символы $0^0, S^1, +^2, \cdot^2$;
 - предикатный символ $=^2$.
- Приоритет S выше \cdot , приоритет \cdot выше $+$.
- Примеры термов:

$$S(S(S(0)))$$

$$x + S(0) \cdot y$$

- Примеры формул:

$$x + y = x + S(0) \cdot y$$

$$\forall x \exists y (x + y = S(S(0)))$$

Стандартная интерпретация языка элементарной арифметики

- Стандартная интерпретация:

- носитель \mathbb{N} ;
- функциональные символы:

$$[0] = 0$$

$$[+] = +$$

$$[S] = \lambda x. x + 1$$

$$[\cdot] = \cdot$$

- предикатный символ = имеет нормальную интерпретацию.
- Интерпретация формул на оценке $\pi(x) = 2, \pi(y) = 3$:

$$[x + y = x + S(0) \cdot y]_{\pi} = (2 + 3 = 2 + (0 + 1) \cdot 3) = T$$

$$[\forall x \exists y (x + y = S(S(0)))] = ?$$

Стандартная интерпретация языка элементарной арифметики

- Стандартная интерпретация:

- носитель \mathbb{N} ;
- функциональные символы:

$$[0] = 0$$

$$[+] = +$$

$$[S] = \lambda x. x + 1$$

$$[\cdot] = \cdot$$

- предикатный символ = имеет нормальную интерпретацию.
- Интерпретация формул на оценке $\pi(x) = 2, \pi(y) = 3$:

$$[x + y = x + S(0) \cdot y]_{\pi} = (2 + 3 = 2 + (0 + 1) \cdot 3) = T$$

$$[\forall x \exists y (x + y = S(S(0)))] = ?$$

- Что будет если поменять носитель на \mathbb{Z} ?

Выразительная сила языка элементарной арифметики

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение \leq)?

Выразительная сила языка элементарной арифметики

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение \leq)? Да:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение \leq)? Да:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Делимость нацело (отношение $|$)?

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение \leq)? Да:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Делимость нацело (отношение $|$)? Да:

$$x | y \equiv \exists z(x = y \cdot z)$$

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение \leq)? Да:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Делимость нацело (отношение $|$)? Да:

$$x | y \equiv \exists z(x = y \cdot z)$$

- Простота (унарное отношение prime)?

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение \leq)? Да:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Делимость нацело (отношение $|$)? Да:

$$x | y \equiv \exists z(x = y \cdot z)$$

- Простота (унарное отношение prime)? Да:

$$\text{prime } x \equiv \neg(x = 0 \vee x = S(0)) \wedge \forall y (y | x \rightarrow y = S(0) \vee y = x)$$