Линейная алгебра, метод Гаусса

На последней паре основной темой был метод Гаусса решения систем линейных уравнений (над полем). Основное действие, которое происходит в методе Гаусса, состоит в том, чтобы с помощью i-го по счёту уравнения избавится от i-ой переменной во всех последующих уравнениях. Когда этого не получается сделать сразу, то стоит поменять уравнения местами. Если и это ничего не даёт, то значит и избавляться было не от чего и надо перейти к следующий переменной. Всё это можно сделать с помощью элементарных преобразований.

Эти операции удобнее проделывать на языке матриц. На паре мы ввели определение произведения матрицы на столбец. Это позволило нам записать систему линейных уравнений в компактном виде

$$Ax = b,$$

где x - это столбец размера n из неизвестных, b — это столбец размера m, а A — матрица размера(видимо) $m \times n$. Матрица A называется матрицей системы линейных уравнений, а матрица $(A|b)$, с приписанным столбцом b, называется расширенной матрицей системы.

Метод Гаусса работает с расширенной матрицей системы и даёт ответ, что решений у системы нет, если в какой-то момент в матрице $(A|b)$ появляется строчка $(0, 0, \dots, 0, \lambda)$, где $\lambda \neq 0$. Если решения есть, то метод Гаусса даёт ответ, какие переменные можно взять произвольными, и как значения остальных через эти переменные выражаются (причём линейным образом).

Ближе к концу были приведены некие общие рецепты для получения примеров векторных пространств. В частности, мы немного обсудили, что такое алгебра над коммутативным ассоциативным кольцом с единицей R.

Определение 1. Будем говорить, что кольцо A снабжается структурой алгебры над R, если задано отображение $\cdot\colon R \times A \to A$, что выполнены аксиомы:
1) $\forall a \in A$ выполнено $1 \cdot a = a$ (очень хочется, чтобы единичка действовала как тождественное отображение)
2) $\forall a, b \in A$, $\forall r \in R$ выполнено $r \cdot (ab) = (r \cdot a)b$
3) $\forall a, b \in A$, $\forall r \in R$ выполнено $r \cdot (ab) = a(r \cdot b)$ (нужна в случае некоммутативного A)
4) $\forall a, b \in A$, $\forall r \in R$ выполнено $r \cdot (ab) = (r \cdot a)b$
5) $\forall a \in A$, $\forall r, s \in R$ выполнено $r \cdot (s \cdot b) = (rs) \cdot b$
6) $\forall a, b \in A$, $\forall r \in R$ выполнено $r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b$
7) $\forall a \in A$, $\forall r, s \in R$ выполнено $(r + s) \cdot b = r \cdot b + s \cdot b$

Видно, что если R поле, то тут написаны все аксиомы векторного пространства плюс ещё что-то.

Факт. Если в кольце A есть единица, то задать структуру алгебры — это то же самое, что задать гомоморфизм колец с единицей $R \to A$. А именно, если задан $\phi\colon R \to A$, то $r \cdot a := \phi(r)a$, используя произведение элементов кольца A. Обратно, определим $\phi(r) := r \cdot 1$.

В частности, все кольца вида $R[t_1, \dots, t_n]/I$, где I - идеал в $R[t_1, \dots, t_n]$, имеют естественную структуру алгебры над R, так как можно взять композицию гомоморфизмов $R \to R[t_1, \dots, t_n] \to R[t_1, \dots, t_n]/I$.

Было замечание, что часто стоит говорить не про гомоморфизмы колец, а про гомоморфизмы алгебр и ещё был отмечен факт(следует из возможности деления с остатком)

Факт. Если $A = K[x]/p(x)$ (K — поле), то $\dim_K A = n$, где n это степень $p(x)$. Требовать, чтобы A было полем, не обязательно.

Наконец по матрице A размера $m \times n$ над полем K мы определили некое подпространство в пространстве K^n, а именно множество решений однородной системы линейных уравнений $Ax = 0$(проверьте, что это подпространство)

$$W = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}.$$

Это оказалось важное пространство, так как выполнен следующий

Факт. Пусть $A \in M_{m\times n}(K)$, а $b \in K^m$. Пусть у системы $Ax = b$ имеется решение x_0. Тогда все остальные решения системы $Ax = b$ имеют вид $x_0 + y$, где $y \in W$ и наоборот, $x_0 + y$ обязано является решением системы $Ax = b$.

В частности, имеет место следствие: у системы $Ax = b$ либо нет решений, либо для их описания необходимо столько же параметров, сколько необходимо для описания решений системы $Ax = 0$ (что, видимо, равно размерности пространства W).

Опуская детали в рассуждениях перейдём к алгоритму нахождения базиса подпространства W.

Решим систему $Ax = 0$ с помощью метода Гаусса. Это даёт нам все решения системы, среди которых мы хотим выбрать базис. Рассмотрим набор переменных, с помощью которых нам удаётся параметризовать все решения. Если этих переменных r штук, то множество всевозможных наборов их значений отождествляется с K^r. Возьмём теперь стандартный базис в K^r. Каждому элементу стандартного базиса e_i соответствует столбик x_i, являющийся базисным в пространстве W (таким образом у вектора x_i на r позициях, соответствующих переменным, через которые всё выражается стоит $r-1$ ноль и одна единица, а на остальных позициях что-то однозначно определяемое).

Подробнее поговорим про это в следующий раз.

Задачи

Задача 1. Рассмотрим множество всех непрерывных функций из $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ непрерывна}\}$. Это векторное пространство над $\mathbb{R}$. Какие из следующих условий задают подпространства внутри $C(\mathbb{R})$?
а) $f(1) = 1$,
б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ (в частности, предел должен существовать),
в) $f'(2) = 1$ (в частности, производная должна существовать),
г) $x^2 f'(x) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}(...)$,
д) f принимает целые значения в целых точках,
е) f обращается в 0 в конечном числе целых точек.

Задача 2. Решите систему и найдите какое-нибудь конкретное её решение

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ 1x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}.$$

Задача 3. Доказать, что если векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ из векторного пространства V линейно независимы, но $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ линейно зависимы, то вектор b представим в виде линейной комбинации векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Задача 4. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдите базис пространства решений однородного уравнения $Ax = 0$.

Задача 5. Доказать, что если система векторов из $\mathbb{Q}^n$ с целыми координатами линейно независима над $\mathbb{F}_p$ для некоторого простого числа p, то данная система векторов линейно независима и над полем $\mathbb{Q}$.

Задача 6. Выяснить, являются ли вектора $v_1 = (4, -5, 2, 6), v_2 = (2, -2, 1, 3), v_3 = (6, -3, 3, 9), v_4 = (4, -1, 5, 6)$ линейно зависимыми.

Определение 2. Степенью монома $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$ назовём число $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Степенью многочлена $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ называется максимум степеней мономов из f.

Задача 7. Найдите размерность пространства
а)$V = \{f \in K[x, y] \mid \deg f \leq k\}$,
б)$V = \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] \mid \deg f \leq k\}$.

Задача 8. Покажите, что множество решений уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, имеет размерность $n-1$ над K. Покажите, что все подпространства размерности $n-1$ в K^n имеют такой вид.

Задача 9. Пусть пространство $V = \{f \in K[x] \mid \deg f \leq n\}$ и даны различные элементы $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in K$. Покажите, что набор многочленов $p_i(x) = \prod_{j\neq i}(x - x_j)$ является базисом V.

Задача 10. Пусть пространство $V = \{f \in K[x] \mid \deg f \leq n\}$. Покажите, что любой набор многочленов $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$, что $\deg p_i(x) = i$, является базисом V.