22. Вычисление интегралов от многозначных функций по полуоси (степенные и логарифмические особенности).

Для того чтобы вычислить интеграл по оси, полуоси или отрезку от какой-либо функции по вычетам, нам необходимо ответить на несколько вопросов. Во-первых, необходимо договориться о том, какую функцию мы будем интегрировать. В частности, если речь идет о многозначной функции, то нужно фиксировать ее регулярную ветвь. Во-вторых, нужно выбрать *замкнутый* контур интегрирования, чтобы впоследствии можно было воспользоваться теоремой о вычетах. В-третьих, необходимо связать интеграл по замкнутому контуру с исходным интегралом.

С подобной процедурой мы уже сталкивались, например, при вычислении интегралов от рациональных функций по оси. Здесь мы рассмотрим более сложные примеры, а именно, вычисление интегралов от многозначных функций по полуоси. Мы позволим себе рассматривать только такие примеры, в которых в качестве функции, интеграл от которой мы будем впоследствии считать по вычетам, можно выбирать ту же самую функцию, что и в исходном интеграле (т. е. в том, который нужно вычислить). При этом мы разберем несколько различных вариантов выбора контура интегрирования.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x)\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \tag{22.1}$$

где $R(x)$ – рациональная функция, особые точки которой располагаются вне полуоси $[0,+\infty)$. Будем предполагать, что интеграл (22.1) сходится в обычном смысле. Вычисление интегралов вида (22.1) проводится в четыре шага.

(1) Выделяем регулярную ветвь $f_0(z)$ *многозначной* функции $f(z) = z^\alpha R(z)$ в комплексной плоскости с разрезом вдоль контура интегрирования $[0,+\infty)$. Удобно фиксировать ветвь так, чтобы на верхнем берегу разреза $[0,+\infty)$ она совпадала с подынтегральной функцией $x^\alpha R(x)$. Тогда на нижнем берегу ветвь $f_0(z)$ будет совпадать с функцией $e^{2\pi i\alpha}x^\alpha R(x)$.

(2) Вычисляем по вычетам интеграл

$$\oint_\gamma f_0(z)\,dz = 2\pi i \sum_n \operatorname*{res}_{z=z_n} f_0(z), \tag{22.2}$$

где z_n – все полюса рациональной функции $R(z)$ и контур интегрирования γ изображен на рисунке 50.

(3) Переходим к пределу при $\rho \to 0$ и $R \to +\infty$. При этом из сходимости интеграла (22.1) следует, что

$$\lim_{\rho\to 0} \oint_{|z|=\rho} f_0(z)\,dz = 0, \quad \lim_{R\to+\infty} \oint_{|z|=R} f_0(z)\,dz = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma f_0(z)\,dz = \int_0^{+\infty} f_0(z+i0)\,dz + \int_{+\infty}^0 f_0(z-i0)\,dz. \tag{22.3}$$

(4) Сравнивая (22.3) и (22.2), получим

$$\int_0^{+\infty} f_0(z+i0)\,dz - \int_0^{+\infty} f_0(z-i0)\,dz = 2\pi i \sum_n \operatorname*{res}_{z=z_n} f_0(z).$$

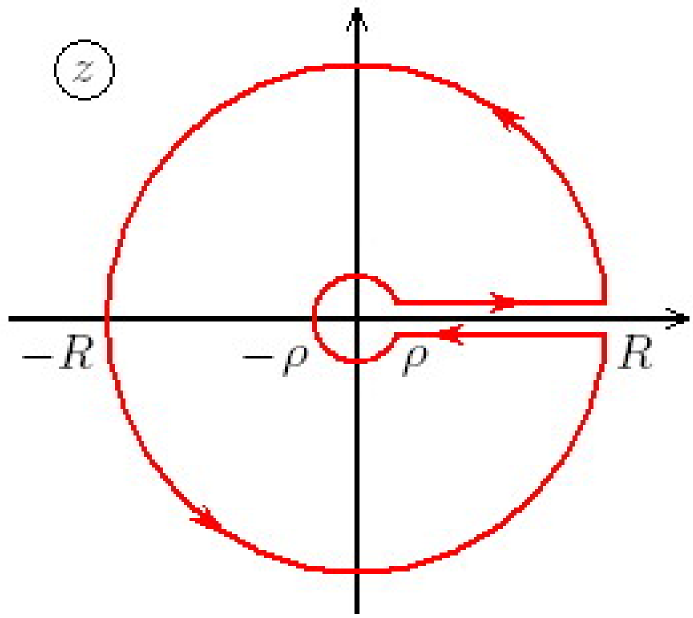

Рис. 50. Контур интегрирования γ выделен красным цветом.

Отсюда

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha R(x)\,dx - e^{2\pi i\alpha}\int_0^{+\infty} x^\alpha R(x)\,dx = 2\pi i\sum_n \operatorname*{res}_{z=z_n} f_0(z),$$

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha R(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\sum_n \operatorname*{res}_{z=z_n} f_0(z).$$

- Если исходный интеграл (22.1) берется от вещественной функции, то приводим ответ к вещественному виду.

Пример 22.1. *Вычислить интеграл*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx.$$

Решение. Вычисления проводим в четыре шага.

Шаг 1. Фиксируем ветвь многозначной функции $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}$

$$f_0(z) = \frac{\sqrt{r}}{z^2+1}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad z = re^{i\varphi},$$

где $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Шаг 2. У функции $f_0(z)$ два полюса первого порядка $z_1 = i$ и $z_2 = -i$ внутри контура γ, изображенного на рисунке 50. Используя теорему о вычетах, найдем интеграл

$$\oint_\gamma f_0(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=i} f_0(z) + \operatorname*{res}_{z=-i} f_0(z)\right) = 2\pi i\left(\frac{\sqrt{r}}{2z}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}\Big|_{z=i} + \frac{\sqrt{r}}{2z}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}\Big|_{z=-i}\right) = \tag{22.4}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{2i}\,e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{-2i}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \pi\sqrt{2}.$$

Обращаем внимание на то, что при вычисления вычета в точке $z_2 = -i$ мы положили $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, а не $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, поскольку для ветви $f_0(z)$ должно выполняться условие $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Шаг 3. Переходим к пределу при $\rho \to 0$ и $R \to +\infty$. При этом

$$\lim_{\rho\to 0}\left|\oint\limits_{|z|=\rho} f_0(z)\,dz\right| \leqslant \lim_{\rho\to 0} 2\pi\rho \max_{|z|=\rho}\left|\frac{\sqrt{\rho}}{1+z^2}\right| \leqslant 4\pi \lim_{\rho\to 0}\rho^{3/2} = 0,$$

$$\lim_{R\to +\infty}\left|\oint\limits_{|z|=R} f_0(z)\,dz\right| \leqslant \lim_{R\to +\infty} 2\pi R \max_{|z|=R}\left|\frac{\sqrt{R}}{1+z^2}\right| \leqslant 4\pi \lim_{R\to +\infty} R^{-1/2} = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\gamma} f_0(z)\,dz = \int\limits_0^{+\infty} f_0(z+i0)\,dz - \int\limits_0^{+\infty} f_0(z-i0)\,dz. \tag{22.5}$$

Замечаем теперь, что не верхнем берегу разреза $\varphi = 0$, а на нижнем $\varphi = 2\pi$, поэтому

$$f_0(z+i0) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \quad \text{при} \quad z = x \in [0,+\infty),$$

$$f_0(z-i0) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}e^{i\pi} = -\frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \quad \text{при} \quad z = x \in [0,+\infty),$$

Отсюда и из (22.5) найдем

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\gamma} f_0(z)\,dz = 2\int\limits_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx. \tag{22.6}$$

Шаг 4. Сравнивая (22.4) и (22.6) получим, что

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \ \square$$

Ответ: $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int\limits_0^{\infty} R(x)\ln x\,dx, \tag{22.7}$$

где $R(x)$ – *четная* рациональная функция

$$R(-x) = R(x),$$

особые точки которой располагаются вне полуоси $[0,+\infty)$. Будем предполагать, что интеграл (22.7) сходится в обычном смысле. Вычисление интегралов вида (22.7) проводится в пять шагов.

(1) Выделяем регулярную ветвь $f_0(z)$ *многозначной* функции $f(z) = R(z)\ln z$ в полуплоскости $\operatorname{Im}(z) > 0$. Удобно фиксировать ветвь так, чтобы на полуоси $[0,+\infty)$ она совпадала с подынтегральной функцией $R(x)\ln x$. Тогда на левой полуоси $(-\infty, 0]$ ветвь $f_0(z)$ будет совпадать с функцией $R(|x|)(\ln|x| + \pi i)$.

(2) Вычисляем по вычетам интеграл

$$\oint\limits_{\gamma} f_0(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_n)>0} \operatorname*{res}_{z=z_n} f_0(z), \tag{22.8}$$

где z_n – все полюса рациональной функции $R(z)$ и контур интегрирования γ изображен на рисунке 51.

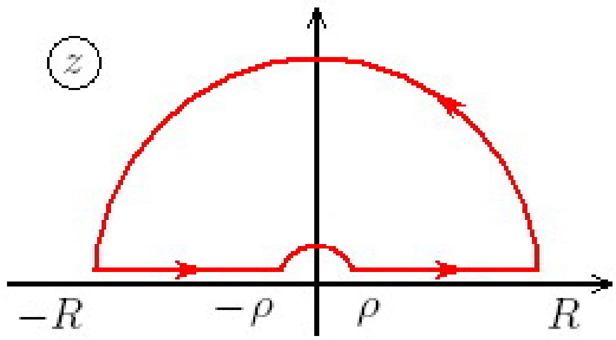

Рис. 51. Контур интегрирования γ выделен красным цветом.

(3) Переходим к пределу при $\rho \to 0$ и $R \to +\infty$. При этом из сходимости интеграла (22.7) следует, что

$$\lim_{\rho\to 0} \int\limits_{\{|z|=\rho\}\cap\{\mathrm{Im}(z)>0\}} f_0(z)\,dz = 0, \quad \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\{|z|=R\}\cap\{\mathrm{Im}(z)>0\}} f_0(z)\,dz = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{R\to+\infty} \oint\limits_{\gamma} f_0(z)\,dz = \int\limits_{-\infty}^{0} f_0(z+i0)\,dz + \int\limits_{0}^{+\infty} f_0(z+i0)\,dz. \tag{22.9}$$

(4) Сравнивая (22.9) и (22.8), получим

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f_0(z+i0)\,dz + \int\limits_{0}^{+\infty} f_0(z+i0)\,dz = 2\pi i \sum_{n} \operatorname*{res}_{z=z_n} f_0(z).$$

Отсюда

$$\int\limits_{-\infty}^{0} R(x)(\ln|x| + \pi i)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} R(x)\ln x\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_n)>0} \operatorname*{res}_{z=z_n} f_0(z)$$

Сделаем замену переменных $x \to -x$ в первом интеграле. Учитывая четность функции $R(x)$, получим

$$\int\limits_{0}^{+\infty} R(x)(\ln|x| + \pi i)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} R(x)\ln x\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_n)>0} \operatorname*{res}_{z=z_n} f_0(z),$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} R(x)\ln x\,dx = \pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_n)>0} \operatorname*{res}_{z=z_n} f_0(z) - \frac{\pi i}{4} \int\limits_{\mathbb{R}} R(x)\,dx. \tag{22.10}$$

Здесь мы учли, что

$$2\int\limits_0^{+\infty} R(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} R(x)\,dx.$$

(5) Вычисляем интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} R(x)\,dx$, например, методом, изложенным на стр. 50, и подставляем результат в (22.10).

- Если исходный интеграл (22.7) берется от вещественной функции, то приводим ответ к вещественному виду.

Пример 22.2. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}\,dx. \tag{22.11}$$

Решение. Вычисления проводим в пять шагов.

Шаг 1. Фиксируем ветвь многозначной функции $f(z) = \frac{\ln z}{z^2+1}$

$$f_0(z) = \frac{\ln r + i\varphi}{z^2+4}, \quad z = re^{i\varphi},$$

где $\varphi \in (0,\pi)$.

Шаг 2. У функции $f_0(z)$ один полюс первого порядка $z_1 = 2i$ внутри контура γ, изображенного на рисунке 51. Используя теорему о вычетах, вычислим интеграл

$$\oint\limits_{\gamma} f_0(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=2i} f_0(z) = 2\pi i \left.\frac{\ln r + i\varphi}{2z}\right|_{z=2i} = \left[r=2,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2}\left(\ln 2 + \frac{\pi i}{2}\right). \tag{22.12}$$

Шаг 3. Переходим к пределу при $\rho \to 0$ и $R \to +\infty$. При этом

$$\lim_{\rho\to 0}\left|\int\limits_{\{|z|=\rho\}\cap\{\operatorname{Im}(z)>0\}} f_0(z)\,dz\right| \leqslant \lim_{\rho\to 0} \pi\rho \max_{|z|=\rho}\left|\frac{|\ln\rho| + \pi}{1+z^2}\right| \leqslant 4\pi \lim_{\rho\to 0} \rho\,|\ln\rho| = 0,$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int\limits_{\{|z|=R\}\cap\{\operatorname{Im}(z)>0\}} f_0(z)\,dz\right| \leqslant \lim_{R\to+\infty} \pi R \max_{|z|=R}\left|\frac{\ln R}{1+z^2}\right| \leqslant 4\pi \lim_{R\to+\infty} \frac{\ln R}{R} = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{R\to+\infty}\oint\limits_{\gamma} f_0(z)\,dz = \int\limits_{-\infty}^{0} f_0(z+i0)\,dz + \int\limits_0^{+\infty} f_0(z+i0)\,dz = \tag{22.13}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\ln|x| + i\pi}{x^2+4}\,dx + \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x + i\pi}{x^2+4}\,dx + \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}\,dx =$$

$$= 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}\,dx + \pi i \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx.$$

Шаг 4. Сравнивая (22.12) и (22.13) найдем, что

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\ln 2 + \frac{\pi i}{2}\right) - \frac{\pi i}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\ln 2 + \frac{\pi i}{2}\right) - \frac{\pi i}{4}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+4}\,dx. \qquad (22.14)$$

Шаг 5. Вычислим интеграл в правой части равенства (22.14), см. пример 15.1,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+4}\,dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=2i} \frac{1}{z^2+4} = \frac{\pi}{2}\,. \qquad (22.15)$$

Подставляя (22.14) в (22.15), найдем

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\ln 2 + \frac{\pi i}{2}\right) - \frac{\pi i}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi \ln 2}{4}\,. \ \square$$

Замечание 22.3. *В данном примере можно было избежать выполнения пятого шага. Для этого достаточно было взять вещественную часть от обеих частей равенства* (22.14)*.*

Ответ: $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+4}\,dx = \frac{\pi \ln 2}{4}$.

Домашнее задание:

Задача 22.4. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(x+1)}$.

Ответ: $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(x+1)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Задача 22.5. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(x-8i)}$.

Ответ: $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(x-8i)} = \frac{\pi(3+i\sqrt{3})}{6}$.

Задача 22.6. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\,(x+16i)}$.

Ответ: $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\,(x+16i)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{3\pi}{8}}$.

Задача 22.7. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[2]{x}(x+1)(x+4)}$.

Ответ: $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)(x+4)} = \frac{\pi}{6}$.

Задача 22.8. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)(x+8)}\,dx$.

Ответ: $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)(x+8)}\,dx = \frac{2\pi}{7\sqrt{3}}$.