DL 3.1. Докажите, что у каждой невыполнимой формулы в КНФ, использующей n переменных, есть резолюционное опровержение, состоящие из не более, чем $2^{n+1}-1$ дизъюнктов.

DL 3.2. В каждую клетку квадрата $n \times n$ поставим свою пропозициональную переменную, затем для каждой клетки, в которой стоит переменная x, запишем дизъюнкт $(\neg x \vee u(x) \vee r(x))$, где $u(x)$ — это переменная, которая находится в соседней сверху клетке от x (если верхнего соседа нет, то $u(x) = 0$), а $r(x)$ — это перемененная, стоящая в соседней справа клетке от x (если правого соседа нет, то $r(x) = 0$). Пусть a — переменная, которая стоит в левой нижней клетке, допишем ещё дизъюнкт (a). Покажите, что конъюнкция выписанных дизъюнктов — невыполнимая формула, и для нее существует резолюционное опровержение длины $O(n^2)$.

DL 3.3. Как модифицировать рассказанный на лекции алгоритм, проверяющий выполнимость формулы в 2-КНФ, чтобы он за полиномиальное от числа переменных время также выдавал набор значений переменных, который выполняет формулу?

DL 3.4. Формула в КНФ называется *хорновской*, если каждый ее дизъюнкт содержит не более одной переменной без отрицания. Придумайте алгоритм, который за полиномиальное от длины входной формулы время проверит, выполнима ли хорновская формула.

Определение 3.1. Булева функция называется самодвойственной, если выполняется равенство $f(1-x_1, 1-x_2, \dots, 1-x_n) = 1 - f(x_1, \dots, x_n)$. Булева функция называется линейной, если она имеет вид $f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \bmod 2$, где $a_i \in \{0, 1\}$.

DL 3.5. **(Теорема Поста)** Пусть есть набор булевых функций, среди которых есть немонотоная, не сохраняющая ноль (т. е., $f(0, \dots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т. е., $g(1, \dots, 1) = 0$), нелинейная, несамодвойственная. Докажите, что:

a) с помощью композиций этих функций можно получить отрицание, константу 1, константу 0;
b) с помощью композиций этих функций можно получить любую булеву функцию;
c) если набор булевых функций не удовлетворяет условию теоремы Поста, то через композицию этих функций нельзя выразить все булевы функции.

DL 2.2. Булева функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется монотонной, если при $x \leqslant y$ выполняется $f(x) \leqslant f(y)$ ($x \leqslant y$, если для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется $x_i \leqslant y_i$). Докажите, что:

b) монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки $\vee$ и $\wedge$.

DL 2.5. Пусть формула $\phi \to \psi$ является тавтологией. Докажите, что найдется такая формула τ, которая содержит только общие для ϕ и ψ переменные, что формулы $\phi \to \tau$ и $\tau \to \psi$ являются тавтологиями.

DL 2.6. Приведите пример булевой функции от n аргументов, у которой любая дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены (дизъюнкты или конъюнкты) длины n и их не меньше 2^{n-1}.

DL 2.7. Две формулы, содержащие только переменные и связки $\vee$, $\wedge$ и $\neg$, эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду $\vee$ заменить на $\wedge$ и наоборот.