Одиннадцатое занятие

1. Найти количество совершенных паросочетаний в полном графе на четном числе вершин.

2. Пусть M и M' есть два паросочетания в графе G. Описать структуру их симметрической разности $M \Delta M'$. Как изменится эта структура в случае, если паросочетания M и M' максимальны? А если M и M' совершенны?

3. Подсчитать количество совершенных паросочетаний у дерева на n вершинах, используя результаты предыдущего упражнения.

4. Рассмотрим следующую игру на графе G: два игрока поочередно выбирают вершины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ графа так, чтобы вершина x_{i+1} была бы смежной с вершиной x_i; тот из игроков, кто не сможет выбрать новую вершину по этим правилам, проигрывает. Доказать, что первый игрок имеет выигрышную стратегию тогда и только тогда, когда в G отсутствует совершенное паросочетание.

5. Определить числа $\alpha(G)$, $\alpha'(G)$, $\beta(G)$ и $\beta'(G)$ для графа $G = K_n$.

6. Определить числа $\alpha(G)$, $\alpha'(G)$, $\beta(G)$ и $\beta'(G)$ для графа Петерсена

7. Доказать, что для любого простого нетривиального графа G справедливо неравенство
$$\alpha(G) \leq n - \frac{m}{\Delta(G)},$$
где n — количество вершин, а m — количество ребер в графе G. Показать, что в случае регулярного графа отсюда следует, что $\alpha(G) \leq n/2$.

8. Показать, что для любого двудольного графа $G[X, Y]$ произведение $\alpha(G) \cdot \beta(G) \geq |E(G)|$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда граф является полным двудольным графом $K_{n,m}$.

9. Доказать, что для любого графа G справедливо неравенство
$$\alpha(G) \geq \sum_{x \in V(G)} \frac{1}{\deg(x) + 1}.$$