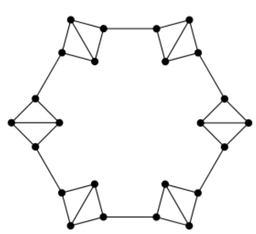
Домашнее задание

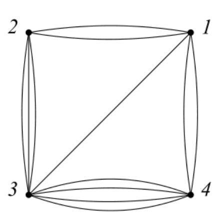
1. (0,5) Какова максимальная степень вершины в дереве, последовательность Прюфера которой имеет вид $(1, 7, 2, 2, 2, 2)$?

2. (2,5) Пусть у нас имеется улица с односторонним движением, на которой расположено n парковочных мест. На эту улицу последовательно заезжают машины с порядковыми номерами от 1 до n. Каждая i-я машина по прибытии едет вначале к своему любимому парковочному месту $f(i)$. Если это место оказывается свободным, то она занимает его. В противном случае она пытается занять первое следующее за ним свободное место. В случае, если такового не оказывается, процесс парковки считается завершившимся неудачей. Функция $f : [n] \to [n]$ называется парковочной функцией, если задаваемая ею парковка всех n машин прошла успешно. Доказать, что количество всех различных парковочных функций равно $(n + 1)^{n-1}$.

3. (1) Рассмотрим 3-регулярный граф, представляющий собой ожерелье из m графов "воздушный змей" (на рис. такой граф показан для случая $m = 6$). Без использования рекуррентного соотношения и матричной теоремы о деревьях подсчитать количество остовных деревьев в таком графе для произвольного значения параметра $m > 1$.

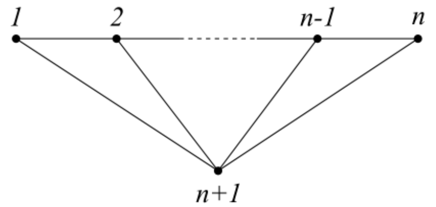


4. (1,5) Подсчитать количество остовных деревьев в графе, изображенном на рис., как с использованием рекуррентного соотношения, так и с помощью матричной теоремы о деревьях.



5. (2) Используя рекуррентное соотношение, подсчитать количество остовных деревьев графа G_n "лестница" (рис.), построенного на $2n$ вершинах и $3n - 2$ ребрах.

6. (1,5) Используя рекуррентное соотношение из лекции, подсчитать количество остовных деревьев графа $K_1 \vee P_n$ "веер", полученного добавлением к P_n вершины, смежной с каждой из вершин пути P_n. Можно ли выразить это количество через числа Фибоначчи?



7. (2) Используя рекуррентное соотношение, подсчитать количество остовных деревьев в графе W_n (колесе).

8. (1,5) Пусть G есть простой граф, построенный на n вершинах и m ребрах. Предположим, что H_1 есть граф, полученный из G заменой каждого из его ребер на мультиребро кратности k, а H_2 есть граф, полученный из G заменой каждого из его ребер на путь длины k, проходящий через $k?1$ новую вершину. Доказать, что $t(H_1) = k^{n-1} \cdot t(G)$ и $t(H_2) = k^{m-n+1} \cdot t(G)$

9. (2) Без использования рекуррентного соотношения и матричной теоремы о деревьях доказать, что количество остовных деревьев графа $K_{3,n}$ равняется $n^2 \cdot 3^{n-1}$

10. (1,5) Используя матричную теорему о деревьях, подсчитать количество всех остовных деревьев полного двудольного графа $K_{m,n}$.

11. (1,5) Используя формулу Кэли, доказать, что в графе $K_n - e$ имеется ровно $(n-2) \cdot n^{n-3}$ остовных деревьев.

12. (1) В случае d-регулярного графа G выразить собственные числа матрицы Кирхгофа $L(G)$ графа G через собственные числа матрицы M_a смежности графа G.

13. (2,5) Доказать, что граф Петерсена имеет 2000 остовных деревьев.