

# Планарные графы. (ДЗ)

28 марта 2017 г.

1. С помощью леммы Жордана доказать непланарность графа  $K_{3,3}$ .
2. Доказать, что число пересечений двудольного графа  $K_{2s,2t}$ , построенного на  $2s + 2t$  вершинах, ограничено сверху величиной  $s(s - 1)t(t - 1)$ . Как изменится этот результат в случае, когда в одной или в обеих долях присутствует нечетное количество вершин?
3. В процессе доказательства непланарности графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$  мы показали, что графы  $K_5 \setminus e$  и  $K_{3,3} \setminus e$  являются максимальными планарными графами. Заметим, что правильные вложения в плоскость обоих этих графов представляют собой некоторую триангуляцию плоскости. Доказать, что данный факт справедлив и в общем случае, а именно, что любой простой максимально простой граф, построенный на  $n \geq 3$  вершинах, представляет собой некоторую триангуляцию плоскости.
4. Доказать, что любой граф  $G$ , содержащий не более чем три цикла, является планарным.
5. Плоский граф  $\tilde{G}$  называется самодвойственным, если  $\tilde{G}$  изоморфен  $\tilde{G}^*$ . Построить два бесконечных семейства самодвойственных графов.
6. Доказать, что не существует плоского графа  $\tilde{G}$ , имеющего ровно пять граней, каждая пара из которых имеет общее ребро.
7. Доказать, что плоский граф  $\tilde{G}$  является двудольным тогда и только тогда, когда двойственный к нему граф  $\tilde{G}^*$  является плоским эйлеровым графом.
8. Доказать, что удалению в плоском связном графе  $\tilde{G}$  ребра  $e$ , не являющегося мостом, отвечает стягивание ребра  $e^*$  в  $\tilde{G}^*$ . Кроме

того, показать, что если  $e$  не является петлей в исходном графе  $\tilde{G}$ , то стягиванию  $e$  в  $\tilde{G}$  отвечает удаление ребра  $e^*$  в  $\tilde{G}^*$ .