1. Ну, что такое мн-во — вы знаете; мн-во — это мн-во студентов в этой аудитории; вы здесь все различимы (т.е. $x_i \neq x_j$), но объединены по некот. признаку: собрались в этой аудитории. Итак,

$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — мн-во, сост. из n эл-тов; т.е. $|X| = n$.

Объед., перес., разность, доп., диагр. Эйлера-Венна, законы Де-Моргана.

1) Покрытие.

2) Разбиение: разбиение мн-ва студ. в аудит. по группам: 3 блока = 3 группы.

3) Упоряд. разбиение: когда они выходят на сцену за дипломами: порядок — важен ⇒ ...

4) Разделение: в каких-то группах студенты не явились

5) Декартово пр-е: $X_1 \times \ldots \times X_n$; пример: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: пары чисел $(1,1)$; $(1,2) \neq (2,1)$ и т.д. Еще: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — плоск. коорд.; $[8] \times \{a, \ldots, h\}$ — шахм. доска и т.д.

По сути, это — упоряд. мн-во, в кот. допускается повторение эл-тов.

6) Если же порядок — не важен, мы говорим о мультимн-ве; пример — деньги (монеты) в кошельке.

2. В комбинаторике все эти объекты имеют спец. название.

а) k-сочетание без повторений наз. $\forall$ k-подмн-во n-мн-ва

б) k-размещ. без повт. наз. упорядоченное k-подмн-во n-мн-ва

в) k-размещ. с повт. — это элт декарт. пр-я мн-в из n эл-тов

$$\underbrace{X \times \ldots \times X}_{k} = X^k$$

г) k-сочет. с повт. — это официально наз. ~~мульт~~ k-элтное мультимн-во над мн-вом X, $|X| = n$.

Пример: монеты в 1, 2, 5 и 10 рублей — это мн-во X; k-мультимн-во: k монет в кошельке; и это — k-сочет. с повт.

лекция №1

3. Теперь переходим к 2-м самым основным правилам перечислит. комб-ки: правило Σ и правило Π.

1) Области (2), группы (3)

2) A, $|A|=k$, B, $|B|=n$ $\Rightarrow$ $|A\cup B|=|A|+|B|$.

3) Обобщение: есть разбиение мн-ва X $\Rightarrow$ $|X|=\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

Правило произв.: 1) $|X_1\times X_2\times\ldots\times X_k|=|X_1|\cdot\ldots|X_k|$.

2) Неформально: в аудитории сидят 3 девушки и много парней; нам нужно для вручения мантии почетного доктора уча выбрать пару $м\times ж$; сколькими способами я могу это сделать? Ясно, что $3\cdot 31=\ldots$

---

4. В качестве 1-го важного примера: давайте сосчитаем число k-сочет. без повт; ~~это~~ число обозначим $\binom{n}{k}=C_n^k$. Вы, конечно, все знаете ~~эту~~ явную ф-лу; она к чему?

1) Она неправильная; 2) Она неудобна для выч.

Лучше – рекурр. ф-ла; а для ее получ нужно применить правило Σ; для этого: введем мн-во Σ_k всех k-элементных подмн-в данного n-мн-ва X.

Пример: $X=\{x_1,x_2,x_3\}$; $\Sigma_2=\{\{x_1,x_2\},\{x_1,x_3\},\{x_2,x_3\}\}$

Все это мн-во Σ_k мы разобьем на 2 блока:

$\Sigma_k^{(1)}$ – блок подмн-в, содержащих элт x_1

$\Sigma_k^{(2)}$ – блок k-подмн-в, кот. эти элты не содержат.

Но: число элтов и там, и там мы можем легко сосчитать: в 1-м случае: элт x_1 выбран, и нам нужно выбрать $k-1$ элт из $n-1$ элта; это мы можем сделать $\binom{n-1}{k-1}$ способами.

Во 2-м блоке: x_1 – нет, и нам нужно выбрать k элтов из мн-ва $X\setminus\{x_1\}$, т.е. из мн-ва в $(n-1)$ элтов $\Rightarrow$ имеем рекурр. соотнош. $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

К этому рекурр. соотнош. нужно добавить нач. условие.

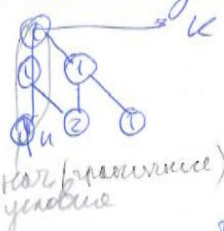
а) $\binom{n}{k}=0$ при $k>n$ — очевидно: ∄ подмнв, > самого мнва.

б) $\binom{n}{0}=1$ $\forall n\ge 0$. — я всегда 1 способом могу выбрать пустое мнво.

И это все дело позволяет мне построить Δ-к Паскаля

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & \dots & & &
\end{array}
$$

Мы будем активно использовать немного другой Δ-к, а именно: (я его нарисую аккуратно и красиво);



я буду рисовать пути: стрелочки; число в кружочке: это число путей в таком Δ-ке;

видно, что для этого числа я имею то же рекурр. соотнош, что и для биноом коэфов: число путей, прих. в т. (n,k), = числу путей, прих. в т. $(n-1,k-1)$ ⊕ число путей, прих в т. $(n-1,k)$.

Такой Δ-к будет нам очень полезен.

5. Мы видим, что ∀ Δ-к Паскаля симм-чен. Формально — это св-во $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

Комбинаторно: если я выбираю k-подмнво n-мнва, я однозначно выбираю $(n-k)$-подмнво этого же мнва ⇒ число таких подмнв совпадает.

6. Следующее важное св-во биноом. коэфтов: ~~следую-~~ Σ-ие по верхнему индексу. Давайте я его сначала напишу:

$$\binom{n+1}{m+1}=\sum_{k=1}^{n}\cancel{\binom{n}{m}}\binom{k}{m} \longrightarrow \text{показать на Δ-ке.}$$

видно, что $\underbrace{\binom{0}{m}+\dots+\binom{m-1}{m}}_{=0}+\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\dots+\binom{n}{m}=\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$

<u>I способ</u> (не комбинаторный) $\binom{k+1}{m+1}=\binom{k}{m+1}+\binom{k}{m}\Rightarrow$

$\Rightarrow \binom{k}{m}=\binom{k+1}{m+1}-\binom{k}{m+1}\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} = \dots$

II способ (комбинаторный). ∃ Σ_{m+1} — мн-во всех ~~точек~~ $(m+1)$-элементных подмн-в $(n+1)$-элементного мн-ва X. Нам его нужно разбить на $(n-m+1)$ блоков (кол-во ненулевых членов в сумме).

Мне проще это будет сделать для очень конкретного мн-ва — мн-ва $n+1$ 1-х натур. чисел $[n+1] \overset{def}{=} \{1, 2, \dots, n+1\}$.

В кач-ве k-го блока я возьму все $(m+1)$-элементные мн-ва натур. чисел, у кот. max число $= (k+1)$.

Пример: $\exists\, n=4$; $X = \{1,2,3,4,5\}$

$\exists\, m=2$; $m+1=3$; число таких подмн-в $= \binom{5}{3} = 10$ штук

$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}$

$\{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}$.

Как теперь это мн-во 3-х элементных подмн-в я буду разбивать на блоки?

1) ~~Блок~~ Блоки, у кот. max элт $= 1$: 0 ($k=0$)

2) — // — ($k=1$) 2 : 0

3) — // — ($k=2$) 3 : 1

4) — // — ($k=3$) 4 : 3

5) — // — 5 : 6

$n-m+1 = 4-2+1 = 3$.

Т.е. в k-й блок я включил $(m+1)$-подмн-ва, в кот. на посл. месте ~~стоит~~ (или: в кот. max ~~чис~~ число) $= (k+1)$.

Вопрос: сколько эл-тов в таком блоке? У меня есть мн-во чисел $[k+1]$; одно из них — известно и фиксир.: это число $(k+1)$; ~~из него мне надо выбрать~~ чтобы сформировать ~~из эти из оставшихся~~ из этих чисел $(m+1)$-элементное подмн-во, мне нужно ~~вы~~ выбрать из k оставшихся чисел m чисел; это я могу сделать $\binom{k}{m}$ способами $\Rightarrow \dots$

7. Еще одно важное тождество: Σ-ие по диагонали (поперек)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$

Док-во — формально и комбинаторно.

8. Важное замечание — принцип биекции. Мы им уже воспользовались при доказательстве двух тождеств Σ-ние по верхнему индексу.

∃ На вечеринку пришло много людей — девушек и молодых людей. А я, только подойдя, когда народ приходил, обращал внимание только на входящих девушек, и их сосчитал. Допустим, их оказалось 25 чел. А теперь меня попросили сосчитать всех гостей. Как мне это сделать быстро? Я попрошу ∀ девушку взять по одному мол. чел. за руки. Если у меня не окаж. ни своб. девушек, ни своб. мол. людей, то число мол. людей = числу девушек ⇒ общее число $= 50$.

Это и есть принцип биекции. Формально:

1) ∃ X, Y — пара мн-в, $f: X \to Y$: $\forall y \in Y\ \exists!\ x \in X: y = f(x)$. Тогда говорят что f — биекция

2) Предложение: ∃ X, Y — пара мн-в, и ∃ биекция $f: X \to Y$. Тогда $|X| = |Y| = n$.

• Биекция образует пары, если $|X| = n$, то и пар $= n \Rightarrow |Y| = n$ •

9. А потом вопрос: а что такое сюръекция и инъекция?

1) сюръекция: $\forall y \in Y\ \exists x: y = f(x)$

2) $\forall x_1, x_2$: если $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Картинки:

10. Еще одно полезное тождество для биномиальных коэффициентов: тождество Вандермонда:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

Частный случай: $m \to m-1$; $k = n$: $\Rightarrow \binom{n+m-1}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m-1}{n-i}$

• Нам надо выбрать из m женщин и n мужчин группу в k человек. Я могу выбрать i из k мужчин ($\binom{n}{i}$ способами), и для ∀ такого выбора выбрать $\binom{m}{k-i}$ из $(n-i)$ женщин $\binom{m}{k-i}$ способами ⇒ по правилу Σ и П

11. Давайте раскроем секрет: почему

$\binom{n}{k} = C_n^k$ наз. биномиальными коэф-тами?

Да потому, что $\exists$ бином. ф-ла

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Доказывается она элементарно: надо просто расписать $(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\dots(x+y)}_{n \text{ штук}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Слагаемое в этой ф-ле: мне нужно выбрать k штук x, умноженное на y $(n-k)$ штук y. Это я могу сделать $\binom{n}{k}$ способами $\Rightarrow$ ..

---

12. Эта ф-ла очень полезна для вывода всяких тождеств с биномиальными коэф-тами. Например, $\exists\ x=1, y=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$ — число всех подмн-в n-мн-ва $= 2^n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ даже обозначается мн-во всех подмн-в как 2^X.

~~Это~~ Это — неполноценное д-во этой ф-лы. Комбинаторное д-во будет получено ниже.

Далее, $\exists\ x=1, y=-1 \Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0}$ — вспомогательное тождество.

Наконец, продифференцируем тождество по $x \Rightarrow$

$$\Rightarrow n\cdot(x+y)^{n-1} = \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} k\cdot\binom{n}{k} x^{k-1} y^{n-k}.$$ Положим $x=y=1$,

получим $$\boxed{n\cdot 2^{n-1} = \sum_{k=\cancel{0}}^{n} k\binom{n}{k} \underbrace{}_{k=0\text{ это}=0} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}}$$

---

13. Теперь: наша задача — сосчитать число k-сочетаний с повторениями из n эл-тов. Или: число k-мультимн-в над n-элементным мн-вом X.

Пример: $X = \{1,2\}$. Перечислим все 3-сочет. с повтор. из 2х эл-тов.

$\binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = 4$: $\{1,1,2\}, \{1,1,1\}, \{1,2,2\}, \{2,2,2\}$.

Осилим-тому, используя принцип биекции сосчитаем число k-~~сочетаний~~ ~~мн-во~~ под мн-вом $X = [n]$. $\forall$ такое k-сочет. м.б. записано с.о.:

$$1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k \le n.$$

Например, $\{1,1,2\}$: $\quad 1 \le \underbrace{1 \le 1 \le 2}_{k=3} \le \underbrace{2}_{n=2}$

Теперь прибавлю к a_1 ноль, к a_2 - единицу $\to$ к a_k - $k-1$:

$\Rightarrow$ получу: $\quad 1 \le a_1 + 0 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < \ldots < a_k + (k-1) \le n+k-1$

~~А это то же~~ В примере: $\quad 1 \le \underbrace{1 < 2 < 4}_{\substack{3\text{-элементное подмн-во} \\ \text{мн-ва из } (n+k-1) \text{ эл-тов} \\ =4}} \le 4$

Т.е. я построил биекцию мн-ва X всех k-соч. с повт. из n эл-тов в мн-во Y всех k-сочет. без повт. из $(n+k-1)$ эл-тов $\Rightarrow$ по принципу биекции, число таких объектов совпадает $\Rightarrow$

$$\boxed{\overline{C}_n^k \equiv \left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}}$$

---

14. <u>Задание №2.</u> Д-ть, что числа $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ удовл-ют рекурр. соотн.

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right), \quad n,k = 1,2,\ldots$$

с нач. условиями $\left(\!\binom{n}{1}\!\right) = \binom{n}{1} = n; \quad \left(\!\binom{1}{k}\!\right) = \binom{1+k-1}{k} = \binom{k}{k} = 1.$

Д-ть формально и комбинаторно.

---

15. ~~Сосчитаем~~ Получим еще одно очень полезное тождество, ~~связ. с $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$~~ для бином. коэффов. Сделаем это, используя $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$, а именно: (если мало будет времени $\to$ на практике)

возьмем все k-сочет. с повторением из $(n+1)$ элементного мн-ва. Их число $= \left(\!\binom{n+1}{k}\!\right) = \binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{n}$.

С другой стороны, разобьем мн-во Σ_k таких k-сочетаний на $(k+1)$ блок с.о.: возьмем эл-т $x_1 \in X$ и в i-й блок включим все k-сочетания, содержащие ровно i штук x_1.

Подсчитаем число эл-тов в V таком блоке. У нас i мест занято $\Rightarrow$ их число $= \left(\!\!\binom{n}{k-i}\!\!\right) = \binom{n+k-i-1}{k-i} = \binom{n-i+k-1}{k-i} =$

$= \binom{n+k-i-1}{n-1} \Rightarrow$ имеем: $\boxed{\binom{n+k}{n} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+k-i-1}{n-1}}$

Она не очень удобна; лучше: $\tilde{n} = n-1$; $n = \tilde{n}+1$; $\tilde{k} = k+1$; тогда $n+k = \tilde{n}+\tilde{k} \Rightarrow$ $\boxed{\binom{n+k}{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+k-i-1}{n}}$

$\Rightarrow$ Задание № 3: взять частные случаи $n = 0, 1, 2, 3$ и получить тождества для сумм.

---

§5. Самые популярные задачи, в кот. всплывают козффи $\binom{n}{k}$ и $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$, связаны с т.н. урновыми схемами.

Имеется урна, в кот. имеются не n различных предметов (шаров). Мы вытаскиваем шары (предметы) из урны; ~~заполнение k позиций~~ (например, шары с написанными на них номерами), ~~В 1-м случае~~ Наша задача - заполнение k неразличимых позиций. В 1-м случае шары не возвращаются в урну, во 2-м - возвращаются.

Особенность: нас не интересует порядок, в кот. эти шары появлялись из урны; нас интересует ре-т - набор номеров на вытянутых шарах.

Пример: отборочный турнир.

Но: иногда нас очень интересует порядок, в кот. шары появлялись из урны $\Rightarrow$