1. А как нам действовать в случае лин. рекурр. соотношений с переменными коэфф-тами?

Оказывается, что если мы будем использовать для их решения обыкновенные производящие функц, то в процессе решения мы ~~придём~~ придём к ОДУ на такие функц. Т.е. вместо лин. алгебраич. урий на f мы в процессе решения будем получать ОДУ на f.

Но: прежде, чем понять, почему это так, нам надо понять, что есть такое производная ОПФ.

2. ~~Опр-е~~ Идея: если мы на f получили лин.-алг. ур-е, то: мы сводим задачу к виду

$$f\cdot g = h \Rightarrow f = h\cdot g^{-1};$$

что такое g^{-1} с точки зрения теории форм. степ. рядов мы поняли; $\Rightarrow$ можем делить h/g. (т.е. что такое производная форм. степ. ряда)?

А что такое ОДУ на f? И как его решать (т.е. интегрировать)? Т.е.: что такое производная f? И что такое $\int$-л f? форм. степ. ряды?

2. Опр-е $\exists$ $a_0, a_1, a_2, \dots$ — некот. числ. посл-ть и $\exists$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$ — О.П.Ф для этой числ. посл.

Производной этой О.П.Ф. наз. формальный степ. ряд вида $f'(x) := a_1 + 2a_2x + 3a_2x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Иными словами, производной числ. посл-ти $a_0, a_1, a_2 \dots$ наз. числ. посл-ть ~~$0 a_0$~~ $1\cdot a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3, \dots$

т.е. на 1-м месте вместо a_0 стоит элт $1\cdot a_1, \dots$

Интегралом этой О.П.Ф. наз. форм. степ. ряд вида

$$\int f(x) := a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{(n+1)}x^{n+1}$$

Иными словами, $\int$ от числ. посл-ти $a_0, a_1, a_2 \dots$ наз. числ. посл-ть $0, \frac{a_0}{1}, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots$

3. Заметим, что это операции над формальными степ. рядами или, что то же, над числ. последов. Для этих операций можно выводить те же св-ва, что и для соответствующих операций над обычными функциями (функциями в мат. анализе). Причем вывод этих св-в иногда оказывается даже более простым, чем соотв-ующий вывод в мат. анализе.

Примеры. 1) Докажем, что если $f'(x)=0$, то $f(x)=a_0$ – ~~константа~~ (т.е. это – числ. пость вида $a_0, 0, 0, 0, \ldots$)

• Что означает „два форм. степ. ряда равны“? Это означает, что равны их коэф-ты при соотв-ующих степенях x.

Здесь: $f'=0$ означает, что $n \cdot a_n = 0 \quad \forall n = 1, 2, \ldots \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = 0 \Rightarrow f = a_0 + 0 \cdot x + 0 x^2 + \ldots = a_0$$

2) Докажем, что если $f' = f$, то $f = Ce^x$, т.е.

$$f = C\left[1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots\right] =: e^x \cdot C$$

Опять-таки, что означает, что $f' = f$? Это означ., что равны их коэф-ты при одинак. степ. x, т.е.

$$n \cdot a_n = a_{n-1} \quad \forall n = 1, 2, \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{a_{n-2}}{n \cdot (n-1)} = \ldots = \frac{a_0}{n!} \quad \forall n \geq 1.$$

$$\Rightarrow f(x) = a_0 \cdot e^x$$

4. Заметим теперь, (что: хотя объекты и различны: здесь – форм. степ. ряды, там – функции т.зр. мат. анализа) что и сами операции над этими объектами и их св-ва очень похожи (а проще говоря, аналогичны) соответствующим операциям и св-вам операций над обычными функциями из мат. анализа.

Как формализовать это наблюдение?

Пусть форм. степ. ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

сходится с т. зрения мат. анализа к некот. функц $f(x)$ в некот. области изменения x. Пусть, далее, ряд

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

сходится с т. зрения мат. анализа к некот. функц $g(x)$ в некот. обл-ти изменения x. Тогда очевидно, что

$$g(x) = f'(x).$$

Аналогично, если ряд

$$a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \ldots$$

сх-ся с т. зрения мат. анализа к некот. функц $h(x)$, то очевидно, что

$$h(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi.$$

То же имеет место быть с операциями сложения, умножения, вычитания и деления степ. рядов (сами объекты - разные, но операции над ними и св-ва этих операций - похожи)

Эти рассуждения дают нам право работать с форм. степ. рядами так, как если бы они были нормальными функциями из мат. анализа, и использовать то большое число свойств и фактов, которые нам известны из мат. анализа. Например, мы можем использовать все те методы решения ОДУ, кот. нам из мат. анализа известны.

Единственное здесь ограничение: все эти св-ва (кот. мы пользуемся) должны ~~основыв~~ базироваться на операциях, имеющих смысл с т. зрения не только мат. анализа, но и с т. зрения теории формальных степенных рядов.

Я сейчас не буду углубляться, но (есть и исключение, так) мы вскоре докажем и поймем, почему

$f(x) = e^{(e^x - 1)}$ есть законная ОПФ ст. зр. форм. степ. рядов

а $f(x) = e^{e^x}$ - нормальная функц ст. зрения мат. анализа, но не ОПФ.

5. ~~Применение этих слов~~ Осознав все это, мы теперь перейдем к решению рекурр. соотн. с перем. коэффициентами.

<u>Пример</u>: найти производящую функцию для числовой посл-ти $a_0=1$, $a_n=\binom{2n}{n}$, $n=1,2\ldots$

1) Так как $a_{n+1}=\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(2n+2)\cdot(2n+1)\ldots(2n+2-n-1+1)}{(n+1)!}=$

$$=\frac{2\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n)(2n-1)\ldots\cdot(n+2)}{(n+1)!}=\frac{2\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}{(n+1)\cdot n!}=\frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot a_n,$$

то числ. посл-ть удовл-ет след. рекурр. соотношению:

$$\boxed{(n+1)\cdot a_{n+1}=4n\cdot a_n+2\cdot a_n\ ,\ a_0=1}\Rightarrow\quad(*)$$

Теперь попробуем решить это рекурр. соотнош. (т.е. найти явный вид a_n) с пом. обычн. произв. функц.

~~Можно сразу записать, что~~

Покажем, что: $\frac{df}{dx}=4x\frac{df}{dx}+2\cdot f(x)$ $(**)$

(Решили обратную задачу: по ~~[illegible]~~ явному выражению для a_n построили рекурр. соотнош. (*), кот. эти $\{a_n\}$ удовл-ют.)

2) Можно это и непосредственно, а именно: домножим (*) на x^n и просуммируем по n от 0 до $+\infty$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\cdot a_{n+1}x^n}=4\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\cdot n\cdot x^{n}}+2\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n}$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}\cdot\frac{d(x^{n+1})}{dx}}=4x\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\cdot\frac{d(x^n)}{dx}+2\cdot f(x)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\cdot\frac{d(x)^k}{dx}=4x\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\frac{d(x^n)}{dx}+2f(x)\Longleftrightarrow(**).$$

3) Т.о. свели задачу к решению задачи Коши для функц $f(x)$ вида

$$(1-4x)f'(x)=2\cdot f(x),\quad f(0)=1$$

Решим эту задачу: $\frac{df}{f}=\frac{2\,dx}{1-4x}=\frac{(-1)}{2}\frac{d(1-4x)}{(1-4x)}\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow d\ln f=-\frac{1}{2}d\ln(1-4x)=d\ln(1-4x)^{-1/2}\Longleftrightarrow\ln f=\ln(1-4x)^{-1/2}+C$$

$\int$-уем это равво $\int_0^x f'(\xi)d\xi=\int_0^x df(\xi)=f(x)-f(0)$; $+C$ — общ. кон. усл.

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

Как проверить, ту ли числовую посл-ть мы получили?

Мы здесь наворотили и вовсю пользовались мат. анализом ⇒ хотим проверить, что мы получили функцию числ. посл. [illegible]

4) По ф-ле бинома Ньютона:

$$f(x)=(1-4x)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{n}(-4x)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1/2)_n}{n!}(-4x)^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\frac12\cdot(-\frac12-1)\cdot\ldots\cdot(-\frac12-n+1)}{n!}(-4)^n\cdot x^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!}2^n\cdot x^n=\Big|\,n!\,2^n=(1\cdot2)\cdot(2\cdot2)\cdot(3\cdot2)\ldots(n\cdot2)=2\cdot4\cdot6\cdots2n,$$

$$=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot2n}{(n!)^2}x^n=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n$$

Т.о. видно, что при реш-ии лин. рекурр. соотнош. с перем. коэф-тами с пом. обыкнов. произв. ф-ций получаются обыкнов. диф. ур-ия на эти функ. Однако эти ОДУ не всегда такие простые,

6 Пример Рассмотрим ~~теперь~~ следующее простейшее рекурр. соотношение с перем. коэф-тами:

$$a_{n+1}=(n+1)\cdot a_n,\quad n=0,1,2,\ldots;\quad a_0=1.\qquad(*)$$

1) Очевидно что $a_{n+1}=(n+1)a_n=(n+1)n\cdot a_{n-1}=\ldots=(n+1)!\cdot a_0=(n+1)!$

Попытаемся получить ~~этот~~ тот же ответ с пом. обыкновенных производящих функций?

2) ~~Далее~~ Пусть $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ - обыкнов. произв. функц для числ. посл-ти a_0,a_1,a_2; домножая ур-ие $(*)$ на x^{n+1} и $\sum$ по n от 0 до $+\infty$, получим:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^{n+1}}_{f(x)-1}=\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}n\cdot a_n x^{n+1}}_{x^2\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}n\cdot a_n\cdot x^{n-1}}_{x^2\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{d(x^n)}{dx}}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}}_{x\cdot f(x)}\iff$$

$$\iff f(x)=x^2\cdot f'(x)+x\,f(x)+1\quad\Rightarrow\ ?$$

3) Продиф-уем это ур-ие по x:

$$f'(x)=2x\,f'(x)+x^2f''(x)+f(x)+x\,f'(x)\iff$$

$$\iff x^2f''(x)+(3x-1)f'(x)+f(x)=0\quad;\ f(0)=1\Rightarrow$$

~~Это вырожденное гипергеом. ур-ие~~ выражается через т.н. ~~вырожд.~~ обобщ. гипергеом. функ. $\Rightarrow$

3) Причина: послть растет слишком быстро ⇒ вместо обычной произв. функц здесь лучше использовать экспоненц. производящую функцию $F(x)=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2!}+\dots$ для числовой послти $a_0, a_1, a_2\dots$

Действительно, домножим $(*)$ на $x^{n+1}/(n+1)!$ и просуммир. по n от 0 до $+\infty$ ⇒

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{=} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{x^{n+1}}{n!}}_{=} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x)-1 = x\cdot F(x) \Rightarrow F(x)=\frac{1}{1-x}.$$

---

4) То же получится из решения: если $a_n=n!$, то

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2!}+\dots=1+x+x^2+\dots=\frac{1}{1-x}.$$

---

7. Заметим, что при решении лин. рекурр. соотношений необходимо вводить понятие производной и ф-ла уже для экспоненц. произв. функц. ⇒

Определение. Пусть $F(x)=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2!}+\dots$ — экспоненциальная производящая функция для чис. послти $a_0, a_1, \dots$. По опр-ю, производной этой ЭПФ наз. формальный степ. ряд вида

$$F'(x)=a_1+a_2\frac{x}{1!}+a_3\frac{x^2}{2!}+\dots+a_{n+1}\frac{x^n}{n!}+\dots$$

(иными словами, „экспоненциальной" производной чис. послти $a_0, a_1, a_2, \dots$ наз. „сдвинутая" чис. послть $a_1, a_2, a_3, \dots$).

Замечание: 1) Мы поняли, что там, где для обычной ПФ получается лин. ОДиф. урие (при решении лин. рекурр. соотношений), для ЭПФ получается лин. алгеб. урие.

Оказывается, верно и обратное, что как правило. Т.е., если решать лин. рекурр. соотн. для чисел Фибоначчи

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 0, \ F_1 = 1,$

с пом. Э.П.Ф., то при решении для ЭПФ $F(x)$ получим ОДУ вида

$$F'' = F' + F \quad ; \ F(0)=0, \ F'(1)=1.$$

---

2) Рассуждения для ЭПФ с т. зрения их связи с теории аналитич. функц из мат. анализа, справедливы и здесь.

---

8. В заключение этого § приведем (полезный и) красивый пример на использование ЭПФ для решения лин. рекурр. соотн. с переменными коэф-тами.

1) Мы знаем, что числа Белла, описывающие кол-во всевозможных разбиений n-элем. мн-ва (или число всевозможных классов экв-ти), подчиняются рекурр. соотнош. вида

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \quad , \ B_0 = 1.$$

Решим его с пом. ЭПФ. $B(x) = B_0 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots$

2) Слева: $\sum_{n=0}^{+\infty} B_{n+1} x^n/n! = B_1 + B_2 x + B_3 x^2/2 + \ldots = B'(x)$

Что стоит справа? Очевидно, прое 2х ЭПФ: $B(x)$ и эксп. произв. функц $1 + 1x + 1\,x^2/2! + \ldots = e^x \Rightarrow$ имеем лин. ОДУ вида

$$B'(x) = e^x B(x) \Leftrightarrow d \ln B(x) = d(e^x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln B(x) = e^x + C}_{0=e^0+C},$$

3) Но: $B(0) = 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln B(x) = e^x - 1 \ \Rightarrow \ B(x) = e^{(e^x - 1)}$