Домашнее задание 6. 09.10.14

1(2 балла). Пусть A – подмножество метрического пространства X с метрикой d. Назовем $\sup\limits_{x,y\in A} d(x,y)$ диаметром множества A, обозначим диаметр A через $diam(A)$. Докажите, что если K – компакт в X, то существуют точки x и y из K такие, что $diam(K) = d(x,y)$.

2(1 балл) Докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ точек в метрическом пространстве удовлетворяет свойству $\sum\limits_{i=2}^{+\infty} d(x_i, x_{i-1}) < +\infty$ (т.е. последовательность частичных сумм $z_n = \sum\limits_{i=2}^{n} d(x_i, x_{i-1})$ ограничена), то $\{x_n\}$ — последовательность Коши.

3.(1 балл) Рассмотрим множество натуральных чисел с метрикой $d(i,j) = 1, i \neq j$. Докажите, что $K \subset \mathbb{N}$ – компакт в этой метрике если, и только если K – конечное множество.

4. Пусть X, Y – два непересекающихся множества в $\mathbb{R}^n$ со стандартной эвклидовой метрикой d. Правда ли, что

а)(2 балла) $d(X,Y) > 0$, если X и Y – замкнутые?

б)(2 балла) $d(X,Y) > 0$, если X – компакт, а Y – замкнутое?

Определение. Множество Y называется ε-сетью в метрическом пространстве X, если для любого $x \in X$ существует $y \in Y : d(x,y) < \varepsilon$.

Определение. Пусть A и B подмножества метрического пространства X, причем $A \subset B$. Множество A называется ε-сетью в B, если для любого $b \in B$ существует $a \in A : d(a,b) < \varepsilon$.

Определение. Множество A называется ε-разделенным, если расстояние между любыми двумя разными точками из A больше либо равно ε.

5(1 балл). Пусть A – конечная ε-сеть в X, а B – 2ε-разделенное множество в X. Докажите, что B тоже конечное множество, причем количество элементов в B не больше чем количество элементов в A.