ДЗ 8. Тензорное произведение и теория категорий

Определение 1. Пусть есть два пространства V и W над полем K. Тогда их тензорным произведением называется пространство
$$K\langle v\otimes w \,|\, v\in V,\, w\in W\rangle / Rel,$$
где Rel – это подпространство порождённое
$$(\lambda v_1+v_2)\otimes w-\lambda v_1\otimes w-v_2\otimes w \text{ и } v\otimes(\lambda w_1+w_2)-\lambda v\otimes w_1-v\otimes w_2.$$

У тензорного произведения есть и другое категорное определение.

Определение 2. Пусть есть два пространства V и W над полем K. Тогда их тензорным произведением называется пространство $V\otimes W$ удовлетворяющее условию, что для любого билинейного отображения из $h\colon V\times W\to U$ существует единственное линейное отображение $\hat{h}\colon V\otimes W\to U$, что $\hat{h}\circ i=h$, где i – это «универсальное» билинейное отображение $i\colon V\times W\to V\otimes W$, заданное правилом $(v,w)\to v\otimes w$.

Основной факт про тензорное произведение состоит в том, что для этого пространства несложно построить базис.

Факт. Пусть $e_1,\dots,e_n$ базис V, а $f_1,\dots,f_m$ базис W. Тогда $e_i\otimes f_j$ базис $V\otimes W$.

Однако тензорное произведение – это не просто конструкция для нового векторного пространства. Это функтор. Точнее

Определение 3. Для того, чтобы задать категорию $\mathcal{C}$, необходимо определить класс объектов $Ob\,\mathcal{C}$ и морфизмов $Morph\,\mathcal{C}$ вместе с парой отображений $dom, codom\colon Morph\,\mathcal{C}\to Ob\,\mathcal{C}$. Отображение dom стоит считать сопоставлением стрелки её области определения, $codom$ – её множеству прибытия (значений). Такой набор данных позволяет определить $\mathrm{Hom}(A,B)$ для пары объектов из $Ob\mathcal{C}$, как множество всех стрелок с началом в A и концом в B. Теперь, для завершения понятия категории стоит определить композицию морфизмов, то есть набор отображений
$$\circ\colon\ \mathrm{Hom}(A,B)\times\mathrm{Hom}(B,C)\to\mathrm{Hom}(A,C),$$
со свойствами
1) $\forall A\in Ob\mathcal{C}$ существует $id_A\in\mathrm{Hom}(A,A)$, что для всех $f\in Hom(A,B)$ и $g\in Hom(B,A)$ выполнено $f\circ id_A=f$ и $id_A\circ g=g$.
2) $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

Примеры категорий:
1) Категория множеств (и отображений). Обозначается Set.
2) Категория частично упорядоченных множеств и монотонных отображений. Часто обозначают $Poset$.
3) Категория групп и гомоморфизмов групп. Обозначают Grp.
4) Категория колец и гомоморфизмов колец. Обозначается $Ring$.
5) Категория алгебр над полем K. Обозначается Alg_K.
6) Категория модулей над кольцом R и гомоморфизмов колец. Обозначается $Mod-R$.
7) Частный случай – пусть K – поле, тогда определена категория векторных пространств над K. Обозначается $Vect_K$.

Теория категорий может служить как каркас для построения теории. Например, оказывается, что если вы определили категорию, то в ней можно автоматически определить понятие изоморфизма, эпиморфизма, мономорфизма, произведения, и ещё много чего.

Определение 4. Пусть A,B два объекта категории $\mathcal{C}$. Тогда их произведение это некоторый объект D и пара отображений $pr_A\colon D\to A$ и $pr_B\colon D\to B$, удовлетворяющие свойству:
$\forall D'$, $f\colon D'\to A$, $g\colon D'\to B$ существует единственный морфизм $f\times g\colon D'\to D$, что $pr_A\circ(f\times g)=f$ и $pr_B\circ(f\times g)=g$.

Категории могут быть связаны между собой с помощью чего-то, напоминающего отображения. А именно, с помощью функторов.

Определение 5. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – категории. Тогда функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ это
1) Отображение на объектах $F\colon Ob\,\mathcal{C} \to Ob\,\mathcal{D}$.
2) Для любой пары объектов A, B отображение на морфизмах $F = F_{A,B}\colon \operatorname{Hom}(A, B) \to \operatorname{Hom}(F(A), F(B))$,
так что:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \text{ и } F(id_A) = id_{F(A)}.$$

Пример:
Рассмотрим категорию колец $Ring$. Тогда есть два функтора из $Ring \to Grp$ – $\mathbb{G}_a$ – сопоставление аддитивной группы кольца, и функтор $\mathbb{G}_m$ – сопоставление мультипликативной группы кольца.

Замечание. Под действием функтора изоморфизм переходит в изоморфизм. Поэтому любая функториальная конструкция не меняется при изоморфизмах.

Надо поговорить про тензорное произведение. Оно определено для пары пространств. Таким образом нам надо определить произведение категорий.

Определение 6. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – категории. Определим категорию $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ следующим образом:
1) $Ob\,\mathcal{C} \times \mathcal{D} = Ob\,\mathcal{C} \times Ob\,\mathcal{D}$.
2) $\operatorname{Hom}((A, C), (B, D)) = \operatorname{Hom}(A, B) \times \operatorname{Hom}(C, D)$. Композиция покомпонентная.

Определение 7. Определим функтор

$$\otimes\colon Vect \times Vect \to Vect,$$

задав на объектах как $(V, W) \to V \otimes W$. А на морфизмах ($f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, то $f \otimes g\colon A \otimes C \to B \otimes C$ задано правилом $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes f(y)$.

Замечание. Если есть операторы $A\colon V \to V$ и $B\colon W \to W$. То есть оператор $A \otimes B$ на $V \otimes W$.

Факт. У оператора $A \otimes B$ собственные числа – это попарные произведения с.ч. для A и B.

Факт. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ базис V и $f_1, \ldots, f_m$ – базис W. Тогда матрица $A \otimes B$ строится следующим образом – надо упорядочить базис в обратном лексикографическом порядке (первая координата менее важная). Тогда матрица разобьётся на m^2 блоков в каждом из которых будет стоять $b_{ij}A$, где i, j – номер блока.

Факт. Матрица произведения графов – это тензорное произведение матриц.

С точки зрения физики – тензорное произведение – это способ из понятных типов тензоров – касательных полей, скаляров, дифференциальных форм и т.д. – конструировать новые типы тензоров. Например, билинейная форма на V – это элемент $V^* \otimes V^*$. Структура алгебры на V это элемент $V^* \otimes V^* \otimes V$.

Задачи

Задача 1. Найдите координаты тензора $e^1 \otimes e^2 \otimes (e_1 + e_2) \in V^* \otimes V^* \otimes V$ в базисе

$$(\hat{e}_1, \hat{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определение 8. Копроизведением набора A_α объектов в категории $\mathcal{C}$ называется объект D, вместе с набором отображений $i_\alpha\colon A_\alpha \to D$, что для любого объекта D', вместе с набором отображений $j_\alpha\colon A_\alpha \to D'$ существует единственное $j\colon D \to D'$, что $j \circ i_\alpha = j_\alpha$

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[dr, "j_\alpha"'] & D \arrow[d, "\exists! j"] \\ & D' \end{tikzcd}$$

Задача 2 (Пункт – балл)**.** Найдите копроизведение
а) двух объектов в категории Set?
б) двух объектов в категории $Vect$?
в) двух свободных групп в категории групп?
г) двух произвольных групп в категории групп?
д) счётного числа векторных пространств. В частности, покажите, что это не тоже самое, что их произведение.

Задача 3. Вернёмся к векторным пространствам над полем K. Пусть дан A – оператор на V и B – оператор на W. Найдите собственные числа $A \otimes E + E \otimes B$ на $V \otimes W$.

Задача 4. Пусть A – оператор на V. Тогда $A^{\otimes k}$ – оператор на $V^{\otimes k}$. Пусть $d = \det A$, $a = \operatorname{Tr} A$. Найдите $\operatorname{Tr} A^{\otimes k}$, $\det A^2$.