DL 24. Докажите, что в ориентированном графе $G(V,E)$ без циклов все вершины можно пронумеровать числами от 1 до $|V|$ таким образом, чтобы ребра шли из вершин с меньшими номерами в вершины с большими номерами.

DL 25. Докажите, что глубина дерева решений для функции $\mathtt{OR}_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$ не меньше n.

DL 26. Докажите, что размер дерева решений для функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_{2n}) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus \cdots \oplus x_{2n-1}x_{2n}$ не меньше, чем 2^n, но существует ветвящаяся программа для этой функции размера $O(n)$.

DL 27. Приведите пример функции, в которой ни одна из n переменных не является фиктивной (то есть от её значения иногда зависит значение функции), но глубина дерева разбора равна $O(\log(n))$.

DL 28. Докажите, что если булева функция вычисляется с помощью ветвящейся программы размера S, то она вычисляется и с помощью булевой схемы размера $O(S)$.

DL 29. Правило ослабление позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B. Покажите, что если из дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$ семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i, выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

DL 30. Покажите, что если булева функция вычисляется с помощью схемы полиномиального от числа входов размера и глубиной $O(\log(n))$, то она вычисляется и формулой полиномиального от числа переменных размера.

DL 20. Как модифицировать рассказанный на лекции алгоритм, проверяющий выполнимость формулы в 2-КНФ, чтобы он за полиномиальное от числа переменных время также выдавал набор значений переменных, который выполняет формулу?

DL 22. $f(x_0,\ldots,x_n,y_0,\ldots,y_n,z_0,\ldots,z_{n+1}) = [\sum\limits_{i=0}^{n} x_i 2^i + \sum\limits_{i=0}^{n} y_i 2^i = \sum\limits_{i=0}^{n+1} z_i 2^i]$ ($x + y = z$, где v_i это i битый двоичной записи v). Постройте формулы ϕ_n в КНФ, полиномиального размера от n (сумма числа переменных по всем дизъюнктам ограниченна полиномом от n), что верно следующие

$$\exists g_0,\ldots,g_{m_n}\ \phi_n(x_0,\ldots,z_{n+1},g_0,\ldots,g_{m_n}) \iff f(x_0,\ldots,z_{n+1}).$$

DL 23. По формуле в 2-КНФ построим ориентированный граф. Вершинами графа будут множество переменных и отрицаний переменных. Для каждого дизъюнкта $(l_1 \vee l_2)$ в графе проводится два ребра из $\neg l_1$ в l_2 и из $\neg l_2$ в l_1. Докажите, что формула выполнима тогда и только тогда, когда для каждой переменной x вершины x и $\neg x$ находятся в разных компонентах сильной связности (т.е. либо из x нет пути в $\neg x$, либо из $\neg x$ нет пути в x).