Линейные отображения

На паре мы обсудили понятие линейного отображения между векторными пространствами. Линейное отображение называется изоморфизмом, если оно биекция. Бывают ещё эпи-, моно-, эндо- и автоморфизмы. Их определения так же стандартны. Часто вместо слов эндоморфизм пространства V говорят оператор на пространстве V.

Основная теорема, которая говорит про устройство линейных отображений, следующая:

Теорема 1. *Пусть V_1, V_2 — векторные пространства над полем K. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис V_1, а $f_1, \ldots, f_n$ — набор каких-то векторов из V_2. Тогда существует единственное отображение $L\colon V_1 \to V_2$, что $L(e_i) = f_i$. Пусть вектор $v \in V_1$ раскладывается по базису $v = \sum \lambda_i e_i$, то $L(v) = \sum \lambda_i f_i$.*

Это позволило нам установить следующие

Факт. Задание базиса в пространстве V размерности n равносильно заданию изоморфизма $V \to K^n$. А именно надо базис V отправить в стандартный(обратно — взять прообраз стандартного базиса при указанном изоморфизме). Произвольному вектору указанный изоморфизм сопоставляет столбик координат этого вектора в базисе V.

Факт. Все линейные отображения $L\colon K^n \to K^m$ имеют вид $L(x) = Ax$, где A — матрица $m \times n$ (определяется однозначно, составлена из столбцов $L(e_i)$, e_i – стандартный базис K^n).

Сведём задачу про линейные отображения к матрицам.

Определение 1. Пусть V_1, V_2 - векторные пространства над полем K с базисами $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$ соответственно. Пусть $L\colon V_1 \to V_2$ - линейное отображение. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
& V_1 \arrow[r, "L"] \arrow[dl, "\sim"'] & V_2 \arrow[dr, "\sim"] & \\
K^n \arrow[rrr, bend left, "A"] & & & K^m
\end{tikzcd}$$

Сквозная композиция задаёт линейное отображение из $K^n \to K^m$, то есть матрицу A. Матрица A называется матрицей линейного отображения L в базисах $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$. i-ый столбец матрицы A состоит из координат $L(e_i)$ в базисе $f_1, \ldots, f_m$.

Замечание. Пусть $L\colon V_1 \to V_2$ - линейное отображение. Тогда $\operatorname{Ker} L$ подпространство V_1, а $\operatorname{Im} L$ подпространство V_2. Коль скоро мы научились строить матрицу отображения, то видимо мы умеем искать базисы ядра и образа L (всё это про решение системы $Ax = 0$).

С линейными отображениями можно производить следующие операции:
а) поточечная сумма,
б) поточечное домножение на $\lambda \in K$,
в) композиция линейных отображений.

Факт. Множество $\operatorname{Hom}_K(V_1, V_2)$ (все линейные отображения из V_1 в V_2) естественным образом оснащается структурой векторного пространства используя операции а)б). Множество всех эндоморфизмов $\operatorname{End}_K(V) = \operatorname{Hom}_K(V, V)$ является ассоциативной алгеброй с единицей над полем K благодаря а)б)в).

Несложно проверить, что сумме отображений соответствует сумма матриц, а домножение на элемент $\lambda \in K$ — покомпонентное домножение всех элементов матрицы на λ. Пусть есть две матрицы $A \in M_{m\times n}(K)$ и $B \in M_{l\times m}(K)$. Какая матрица соответствует композиции линейных отображений, построенных по A и B?

Определение 2. Определим произведение $C = A \cdot B$ следующим образом:

$$C_{ij} = \sum_{1 \le k \le m} A_{ik} B_{kj}$$

Иными словами надо взять i-ую строку A, j-ый столбец B, покомпонентно их перемножить, а потом результаты сложить.

Матрица произведения и задаёт композицию линейных отображений. Обратимому линейному отображению соответствует обратимая матрица, то есть такая матрица A, что существует B, что $AB = E$, $BA = E$ (E - единичная матрица подходящего размера для каждого из произведений). Видно, однако, что так как изоморфизм сохраняет размерность, то обратимые матрицы всегда квадратные. Матрица B называется обратной к A и обозначается A^{-1}.

Теперь можно разобраться с ситуацией про замену базиса. Пусть даны пространства V_1, V_2 и линейное отображение $L\colon V_1 \to V_2$. Рассмотрим в пространстве V_1 два базиса $e_1, \dots, e_n$ (старый) и $e'_1, \dots, e'_n$ (новый). Аналогично в V_2 — $f_1, \dots, f_m$ (старый) и $f'_1, \dots, f'_m$ (новый). Нарисуем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[d, "C"'] \arrow[rrr, bend left, "A"] & V_1 \arrow[l, "e"'] \arrow[r, "L"] \arrow[dl, "e'"] & V_2 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & K^m \arrow[d, "D"] \\
K^n \arrow[rrr, bend left, "A'"] & & & K^m
\end{tikzcd}$$

Внимание!!! Имеется расхождение с парой, а именно в определении матриц C и D. Именно указанные матрицы C и D называются матрицами замены базиса из e в e' и из f в f'. Они решают следующую задачу: координаты вектора в старом базисе переводят в координаты вектора в новом базисе. Нас интересует следующее соотношение, позволяющее выразить матрицу в новых базисах, через матрицы замены базисов и старую матрицу:

$$A' = DAC^{-1}.$$

Для вычисления, например, матрицы C необходимо векторы старого базиса e выразить через векторы нового базиса e' и записать коэффициенты в матрицу. Замечу, что матрицу C^{-1}, которая, видимо, является матрицей замены в обратном направлении часто вычислить проще.

В самом конце мы рассмотрели алгоритм для обращения матрицы A — надо сформировать матрицу $(A|E)$ и преобразовать её методом Гаусса к виду $(E|B)$. Матрица B и будет равна A^{-1}.

Так же сформулируем полезную теорему, которую мы ещё не обсуждали:

Теорема 2. *Пусть $L\colon V_1 \to V_2$ — линейное отображение. Тогда*

$$\dim V_1 = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L.$$

Задачи

Задача 1. Пусть $V = \{f \in K[x,y] \mid \deg f \le 2\}$. Выпишите матрицу линейного отображения $L\colon V \to V$ $L(f) = f(x, x+y) - f(x+y, -x+1)$ в мономиальном базисе. Найдите базис ядра и образа этого линейного отображения.

Задача 2. В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим базис $f_1 = (1,0,1)$, $f_2 = (1,1,1)$, $f_3 = (2,1,1)$.
а) Найдите матрицу замены из стандартного базиса в базис f.
б) Найдите матрицу линейного отображения $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, что $L(x_i) = y_i$, где $x_1 = (1,2,1)$, $x_2 = (1,1,1)$, $x_3 = (0,1,1)$, $y_1 = (-3,-1,-1)$, $y_2 = (2,1,2)$, $y_3 = (3,1,3)$ в базисе f (с обоих концов).

Задача 3. Обратите матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 4. Пусть V пространство размерности n над полем из q элементов $\mathbb{F}_q$. Посчитайте число изоморфизмов $V \to V$.

Задача 5. Пусть V пространство размерности n над $\mathbb{F}_q$.
а) Найдите формулу для числа подпространств размерности k внутри V.
б) Обозначим число из предыдущего пункта за $\binom{n}{k}_q$. Докажите тождества:
$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q$;
$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q$.

Задача 6. Для любого n и любого поля K приведите пример нильпотентного оператора L на пространстве размерности n над K, так что $L^{n-1} \ne 0$. Найдите его матрицу в каком-нибудь базисе.

Задача 7. (2 балла) Пусть U, V - это конечномерные векторные пространства над полем, и $A, B\colon U \to V$ - два линейных отображения. Докажите, что если $\dim(\mathrm{Im}(A)) \leq \dim(\mathrm{Im}(B))$, то существуют такие линейные операторы $C\colon U \to U$ и $D\colon V \to V$, что $A = D \circ B \circ C$.

Задача 8. (2 балла) Пусть A и B — две матрицы размеров $m \times n$ и $n \times m$ над полем. Докажите, что если матрица $E - AB$ обратима, то и матрица $E - BA$ обратима.

Задача 9. Пусть A - конечномерная ассоциативная алгебра с единицей над полем K. Покажите, что для любого элемента из A выполнено, что он либо обратим, либо является делителем 0
а) если алгебра A коммутативна, заодно приведите пример, когда утверждение неверно в бесконечномерной ситуации,
б) в общем случае.

Задача 10. Пусть A — нильпотентная матрица из $M_n(K)$. Покажите, что матрица $E - A$ обратима. Найдите явную формулу для обратной матрицы (разложите функцию 1/x в ряд в какой-нибудь точке).