
Алгебра. Программа коллоквиума
2015/2016 учебный год; 2 курс, 3 семестр

1. Ортогональное дополнение и его свойства.
2. Взаимный базис.
3. Евклидовы и унитарные пространства. Длина вектора и метрика. Угол между векторами.
4. Изометрии пространств с невырожденными билинейными (полуторалинейными) формами.
5. Ортогональные и унитарные операторы. Ортогональные и унитарные матрицы.
6. Сопряженный оператор. Свойства сопряженных операторов.
7. Самосопряженные операторы в евклидовом и унитарном пространстве..
8. Нормальные операторы. Критерий нормальности оператора. Свойства собственных чисел и собственных векторов нормального оператора.
9. Канонический вид матрицы самосопряженного оператора в унитарном пространстве. Собственные числа самосопряженного оператора.
10. Классификация полуторалинейных эрмитово симметричных форм на \mathbb{C}^n .
11. Самосопряженные операторы в евклидовом пространстве. Классификация симметрических билинейных форм на \mathbb{R}^n .
12. Канонический вид унитарного оператора.
13. Канонический вид ортогонального оператора.
14. Овеществление и комплексификация.
15. Изоморфизм $SU(2)$ и группы кватернионов нормы 1. Кватернионы и геометрия пространства \mathbb{R}^4 .
16. Гомоморфизм из $SU(2)$ в $SO(3)$.
17. Ортогональные многочлены: многочлены Лежандра, Чебышева, Лагерра и Эрмита.
18. Многочлены Лежандра как собственные функции самосопряженного дифференциального оператора.
19. Тригонометрические многочлены как собственные функции самосопряженного дифференциального оператора.

Примечание: темы, входившие в программу экзамена за 2 семестр, формально не входят в программу настоящего коллоквиума (отдельного вопроса по ним не будет). Однако настоятельно рекомендуется повторить и эти темы, так как на них имеются неоднократные ссылки в основных вопросах, а также они могут оказаться полезными при решении задач. Список старых вопросов прилагается.

1. Билинейные и полуторалинейные формы.
2. Матрица Грама билинейной (полуторалинейной) формы. Её простейшие свойства.
3. Преобразование матрицы Грама при замене базиса.
4. Ортогональный базис. Процесс ортогонализации положительно определенной вещественной симметрической билинейной (комплексной эрмитовой полуторалинейной) формы.