

## Универсальные дополнительные задачи

1. (3) Пусть функция  $f \in C(\mathbb{R})$  удовлетворяет условию

$$f(x) + f(y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

при всех  $x, y \in \mathbb{R}$ . Докажите, что  $f(x) = ax^2$  при любом  $x \in \mathbb{R}$ , где  $a = f(1)$ .

2. (2) Докажите, что для положительной последовательности  $\{x_n\}$  выполнены неравенства

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

3. (3) Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq k \leq 2n} 2^{-\frac{nk}{n+k}}$ .

4. (1) Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(e^n)(\ln n)^n}{n - n e^{n(n/\sqrt{\ln n})} - n e^n \cdot n^{100}}.$$

5. (1) Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^{1/x} + \frac{1}{x} \right)^x.$$

6. а) (1) Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n}$ , при  $a_n = \underbrace{\sin(\sin(\dots \sin(n)))}_{n \text{ раз}}$

б) (3) Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ .