

Домашняя работа №3 по комбинаторике

15 октября 2012 г.

1. [1–] Найдите явную формулу для $S(n, 3)$.
2. [3] Докажите, что $B(n) < n!$ при $n \geq 3$.
3. [2] Докажите следующее рекуррентное соотношение:

$$S(m, n) = \sum_{i=1}^m S(m-i, n-1)n^{i-1}.$$

4. [1+] Найдите явную формулу для $S(n, n-2)$.
5. [1] Мы положили 1000 рублей в банк под 5 процентов годовых. В начале каждого года мы кладём ещё 500 рублей на счет. Сколько денег на счете будет через n лет?
6. [2+] Космический зонд обнаружил, что органическое вещество на Марсе имеет ДНК, состоящее из пяти символов (a, b, c, d, e) ; четыре пары символов — ce, cd, ed, ee — никогда не встречаются в марсианских ДНК, однако любая цепочка, не содержащая этих пар, возможна. Порядок букв в цепочке важен, поэтому, например, цепочка $bbdca$ возможна, а $bbcda$ — нет. Найти рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют эти цепочки слов; найденные соотношения можно пока не решать.
7. [2] Рассмотрим плоскость (x, y) . Предположим, что мы можем ходить по плоскости, делая шаг вверх (U), шаг вправо (R) и шаг влево (L) на единицу длины так, чтобы шаг R не следовал за шагом L и наоборот (так называемые решёточные пути на плоскости). Пусть $a_n, a_0 := 1$, — число таких путей после n шагов. Найти a_n .