# Теория категорий

## Элементарные топосы

Валерий Исаев

07 сентября 2015 г.

# План лекции

# Определение топосов

**Definition**

*(Элементарный) топос* – это категория, в которой существуют конечные пределы, классификатор подобъектов $\Omega$ и для любого $A$ экспонента $\Omega^A$.

Примеры топосов:

- Категории предпучков.
- Эффективный топос.
- Синтаксическая категория подходящего языка.

# Классификатор подобъектов в категории предпучков

## Proposition

*В любой категории предпучков существует классификатор подобъектов.*

## Доказательство.

У нас должна быть биекция между множеством подобъектов объекта $A$ и $Hom(A, \Omega)$. Но по лемме Йонеды должно быть верно $\Omega_a = Hom(\mathbf{y}a, \Omega)$. Следовательно, мы можем определить $\Omega_a$ как множество подобъектов $\mathbf{y}a$. На морфизмах он будет действовать следующим образом:
$\Omega(f : a \to b)(x \hookrightarrow \mathbf{y}b) = \mathbf{y}f^{-1}(x) \hookrightarrow \mathbf{y}a$. Морфизм $true : 1 \to \Omega$ определяется как морфизм, выбирающий на каждом $a$ максимальный подобъект $\mathbf{y}a$.

# Классификатор подобъектов в категории предпучков

## Доказательство.

По определению $\Omega$ для любого подобъекта $f : x \hookrightarrow \mathbf{y}a$ существует уникальный морфизм $\chi_f : \mathbf{y}a \to \Omega$, такой что следующий квадрат является пулбэком:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[d, hook, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, hook, "true"] \\ \mathbf{y}a \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

# Классификатор подобъектов в категории предпучков

## Доказательство.

Пусть теперь у нас есть произвольный пулбэк как на диаграмме справа:

$$\begin{tikzcd} b^{-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, hook, "b^{-1}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[r] \arrow[d, hook, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, hook, "true"] \\ \mathbf{y}a \arrow[r, "b"'] & B \arrow[r, "g"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Тогда для любого $b : \mathbf{y}a \to B$ должно быть верно, что $g \circ b = \chi_{b^{-1}(f)}$. Таким образом, значение морфизма $g$ однозначно определено на любом элементе $b$ морфизмом $f$, и, следовательно, он должен быть уникален. Более того, характеризация, описаная выше, также служит его определением, то есть он существует.

# Частичные комбинаторные алгебры

- *Частичная комбинаторная алгебра* – это множество $A$ вместе с частичной функцией $\cdot : A \times A \to A$, такое что существуют константы $k, s \in A$, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$k \cdot x \cdot y = x$$
$$s \cdot x \cdot y \cdot z = x \cdot z \cdot (y \cdot z)$$

- Частичная комбинаторная алгебра – это алгебраическая модель нетипизированного лямбда исчисления.
- Пример: $A$ – множество нетипизированных лямбда термов по отношению $\beta\eta$-эквивалентности, $\cdot$ – аппликация.
- Пример: $A = \mathbb{N}$, $n \cdot m = \varphi(n)(m)$, где $\varphi$ – некоторая нумерация вычислимых функций.

# Сборки

- *$A$-сборка* – это множество $X$ вместе с отношением $\Vdash$ на $A \times X$, таким что для любого $x \in X$ существует $a \in A$, такой что $a \Vdash x$, и, если $a \Vdash x$ и $a \Vdash y$, то $x = y$.
- Морфизм $A$-сборок $X$ и $Y$ – это функция $f : X \to Y$, такая что существует $r \in A$, реализующий $f$, то есть если $a \Vdash x$, то $r \cdot a \Vdash f(x)$.
- Категория $A$-сборок не является топосом (но является квазитопосом).
- Эту категорию можно расширить, получив топос.
- Такой топос, когда $A$ – второй пример с предыдущего слайда, называется *эффективным топосом*.

# Язык

- Если мы добавим в язык с зависимыми типами достаточное количество конструкций, то его синтаксическая категория (почти) будет топосом.
- Конкретно, нам нужно добавить вселенную утверждений *Prop* и правило, которое говорит, что она содержит все утверждения.

# Замкнутость вселенной

- Обычно еще добавляют правила, которые говорят, что вселенная замкнута относительно различных конструкций: конъюнкций, дизъюнкций, и так далее.
- Если мы добавляем правило, которое говорит, что она замкнута относительно всех утверждений, то это не нужно делать.
- В частности, это означает, что в любом топосе можно проинтерпретировать такие правила.

# План лекции

## Синглтоны

- Для любого $A$ существует морфизм $\{-\}_A : A \to \Omega^A$, о котором можно думать так, что каждому $a$ из $A$ он сопоставляет предикат $A \to \Omega$, который верен только на $a$. Другими словами, если думать о предикате как о подмножестве, то он возвращает синглтон – подмножество, состоящее из одного элемента.
- Этот морфизм можно определить как каррирование $\chi_\Delta : A \times A \to \Omega$, где $\Delta : A \hookrightarrow A \times A$ – диагональ.
- Таким образом, $\chi_\Delta$ – это просто предикат равенства.

## Свойства синглтонов

### Proposition

*Морфизм* $\{-\}_A : A \to \Omega^A$ *является мономорфизмом.*

### Доказательство.

Действительно, во внутреннем языке $\{-\}_A$ можно описать как $\lambda xy.\chi(y = x)$. Пусть $x, x' : A$ – такие, что $(\lambda y.\chi(y = x)) = (\lambda y.\chi(y = x'))$. Подставляя $y = x$, получаем $\chi(x = x) = \chi(x = x')$. Но равенство характеристических функция означает равенство подобъектов, то есть верно утверждение $x = x \leftrightarrow x = x'$. Левая формула верна по рефлексивности, следовательно верна правая, что и требовалось доказать. $\square$

# Декартова замкнутость

## Proposition

*Любой топос является декартово замкнутым.*

## Доказательство.

Мы определим экспоненту $B^A$ так же как и в **Set**, то есть через графики функций. Конкретно, $B^A$ будет подобъектом $\Omega^{A\times B}$, состоящим из функциональных предикатов.

$$B^A = \{f : A\times B \to \Omega \mid (\lambda a : A.\chi(\exists!(b : B)\chi^{-1}(f(a,b)))) = true_A\}$$

Заметим, что предикат $\exists!$ является выразимым:

$$\exists!(b : B)\varphi(a,b) = \chi^{-1}(\lambda a : A.\chi(\{-\}_B)(\lambda b : B.\chi(\varphi(a,b))))$$

# Фундаментальная теорема теории топосов

### Proposition

*Если $A$ – некоторый объект топоса $\mathbf{C}$, то $\mathbf{C}/A$ также является топосом.*

### Доказательство.

Очевидно в $\mathbf{C}/A$ существуют все конечные пределы. Классификатор подобъектов определяется просто как $\Omega_A = A^*(\Omega)$. Подобъекты некоторого $(B, p_B) \in \mathbf{C}/A$ – это просто подобъекты $B$ в $\mathbf{C}$. С другой стороны у нас есть биекция $Hom_{\mathbf{C}}(B, \Omega) \simeq Hom_{\mathbf{C}/A}((B, p_B), \Omega_A)$. Откуда следует, что $\Omega_A$ является классификатором подобъектов в $\mathbf{C}/A$.

# Фундаментальная теорема теории топосов

**Доказательство.**

Теперь мы хотим показать, что для любого $(B, p_B) \in \mathbf{C}/A$ существует $\Omega_A^{(B,p_B)} \in \mathbf{C}/A$. Для такого объекта должны выполняться следующие равенства: $Hom_{\mathbf{C}/A}(X, \Omega_A^{(B,p_B)}) \simeq Hom_{\mathbf{C}/A}(X \times_A (B, p_B), \Omega_A) \simeq Hom_{\mathbf{C}}(X \times_A B, \Omega)$. Но морфизмы $X \times_A B \to \Omega$ – это просто подобъекты $X \times_A B$. Но этот объект сам является подобъектом $X \times B$. Таким образом, это множество состоит из тех морфизмов $p : X \times B \to \Omega$, которые задают подобъект, содержащий $X \times_A B$.

# Фундаментальная теорема теории топосов

## Доказательство.

Пусть $q : X \times B \to \Omega$, $q = \chi_{X \times_A B}$. Тогда это множество можно описать как $\{p : X \times B \to \Omega \mid (\lambda t : X \times B.p(t) \wedge q(t)) = p\}$. Или как $\{p' : X \to \Omega^B \mid (\lambda x : X.\lambda b : B.p'(x)(b) \wedge q(x, b)) = p'\}$. Или как множество $p' : X \to \Omega^B$, таких что $\langle p', p_X \rangle : X \to \Omega^B \times A$ уравнивает стрелки $f, g : \Omega^B \times A \to \Omega^B$, где $f = \pi_1$ и $g = (\lambda(s, a)b.s(b) \wedge p_B(b) = a)$. И, следовательно, как соответствующее подмножество множества морфизмов $Hom_{\mathbf{C}/A}(X, A^*(\Omega^B))$. Следовательно, мы можем определить $\Omega_A^{(B,p_B)}$ как уравнитель $f$ и $g$. $\square$

## Регулярность топосов

- Любой топос – регулярная категория.
- Действительно, мы можем определить пропозициональное обрезание через $\Omega$:

$$\|A\| = \prod_{X:\Omega} (A \to X) \to X$$

- Квантор существования определяется через $\| - \|$ и $\Sigma$ обычным образом.
- Стабильность относительно пулбэков следует из стабильности $\Omega$, $\Pi$ и $\Sigma$.

## Операции над подобъектами

- Используя $\Omega$, легко сконструировать наименьший подобъет и объединение подобъектов.
- Сделаем это сначала для терминального объекта.
- Пусть $A$ и $B$ – подобъекты терминального объекта, тогда определим их объединение как

$$A \cup B = \prod_{X:\Omega} (A \to X) \to (B \to X) \to X.$$

- Легко сконструировать стрелку $A \to A \cup B$, конкретно, $\lambda aXfg.f\ a$. Аналогично определяется стрелка $B \to A \cup B$.
- Теперь, если $C$ – подобъект терминального объекта и $f : A \to C$, $g : B \to C$, то существует стрелка $A \cup B \to C$, конкретно, $\lambda d.d\ C\ f\ g$.

## Когерентность топосов

- Начальный подобъект конструируется аналогичным образом: $0 = \prod\limits_{X:\Omega} X$.
- Аналогчино для любого подобъекта $C$ существует стрелка $0 \to C$, конкретно $\lambda d.d\,C$.
- Если $X$ – произвольный объект, то можно определить эти операции над подобъектами $X$.
- Действительно, так как $\mathbf{C}/X$ является топосом, то в нем эти операции определены для терминального объекта. Но терминальный объект в нем – это $X$.
- Эти операции стабильны относительно пулбэков по аналогичным соображениям.

# Конечные копределы

- Следовательно, любой топос – когерентная категория, а значит в нем существует начальный объект.
- Осталось доказать существование пушаутов.
- Пусть $f : A \to B$ и $g : A \to C$.
- Тогда мы можем определить $B \amalg_A C$ как подобъект $\Omega^B \times \Omega^C$, состоящий из $(p, q)$, удовлетворяющих

$$(\exists(b : B)(p = \{b\}_B) \wedge q = \lambda c.\chi(\exists(a : A)(g\, a = c))) \vee (\ldots)\}.$$