Интерполяция и разложение на простейшие

Задача 1. Найдите многочлен наименьшей степени удовлетворяющий условиям $f(-1) = 6$, $f(0) = 5$, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$.

Задача 2. Найдите многочлен наименьшей степени, удовлетворяющий условиям $f(-1) = 3$, $f'(-1) = 1$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$.

Задача 3. Разложить на простейшие над $\mathbb{C}$ рациональную функцию

$$\frac{3+x}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Задача 4. Разложить на простейшие над $\mathbb{R}$ рациональную функцию

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}.$$

Задача 5. Разложить на простейшие над $\mathbb{R}$ рациональную функцию

$$\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1},\ m < n.$$

Задача 6. Разложите на простейшие над полем $\mathbb{F}_p$ функцию

$$\frac{1}{x^p - x}.$$

Задача 7. (2 балла) Докажите, что для того, чтобы для любого многочлена $f \in \mathbb{C}[x]$ степени меньше или равной $n-1$ было выполнено тождество

$$f(x_0) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n)),$$

необходимо и достаточно, чтобы точки $x_1, \ldots, x_n$ располагались с равными промежутками на круге радиуса 1 вокруг точки x_0.

Задача 8. Пусть дан многочлен $\varphi(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Выразите через $\varphi(x)$ сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}.$$

Задача 9. Пусть дан многочлен $\varphi(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$, где все x_i - различны. Найдите

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^s}{\varphi'(x_i)}$$

для $0 \le s \le n-1$.

Задача 10. а) Рассмотрим базис

$$r_0(x) = 1,\ r_1(x) = x,\ r_2(x) = \frac{x(x-1)}{2},\ \ldots,\ r_n = \frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(x-i),\ \ldots$$

в пространстве $\mathbb{C}[x]$. Покажите, что многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ принимает на $\mathbb{Z}$ целые значения тогда и только тогда, когда коэффициенты f в базисе r_i являются целыми числами. Выведете из этого, что f принимает целые значения на $\mathbb{Z}$ тогда и только $f(n) \in \mathbb{Z}$ для всех $0 \le n \le \deg f$.

б) Покажите, что если многочлен f степени n принимает целые значения в точках $0, 1, 4, \ldots, n^2$, то он принимает целые значения во всех остальных квадратах натуральных чисел.

в) Пусть Δ линейный оператор взятия конечного приращения: $(\Delta p)(x) = p(x+1) - p(x)$ на пространстве $\mathbb{C}[x]$. Докажите, что $\Delta^k(x^m)|_{x=0} = k!S(m,k)$, где $S(m,k)$ количество разбиений m-элементного множества на k непустых подмножеств. Выведите из этого формулу

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^m = k!S(m,k).$$