

Курс: Функциональное программирование
Практика 1. Чистое лямбда-исчисление как язык
программирования

Разминка

- Выполните подстановку

$$\begin{array}{ll} x\ y\ (\lambda z\ y.\ z\ x\ (w\ x)\ y) & [x := w\ (\lambda x.\ w\ x)] \\ x\ y\ (\lambda z\ y.\ z\ x\ (w\ x)\ y) & [y := w\ (\lambda x.\ w\ x)] \\ x\ y\ (\lambda z\ y.\ z\ x\ (w\ x)\ y) & [z := w\ (\lambda x.\ w\ x)] \\ x\ y\ (\lambda z\ y.\ z\ x\ (w\ x)\ y) & [x := w\ (\lambda x.\ y\ x)] \end{array}$$

Определите, возможно ли в получившемся терме выполнить β -преобразование.

- Уберите лишние скобки и при возможности выполните β -преобразование

$$((\lambda z.(z\ (y\ z)))\ (z\ x)\ z)$$

Булевы значения можно определить так:

$$\begin{array}{l} \text{tru} \equiv \lambda t\ f.\ t \\ \text{fls} \equiv \lambda t\ f.\ f \end{array}$$

Стандартные булевы операции кодируются так:

$$\begin{array}{l} \text{iif} \equiv \lambda b\ x\ y.\ b\ x\ y \\ \text{not} \equiv \lambda b.\ b\ \text{fls}\ \text{tru} \\ \text{and} \equiv \lambda x\ y.\ x\ y\ \text{fls} \\ \text{or} \equiv ??? \text{ (упражнение)} \end{array}$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства условного выражения выполняются:

$$\begin{array}{l} \text{iif}\ \text{tru}\ v\ w = v; \\ \text{iif}\ \text{fls}\ v\ w = w. \end{array}$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства логического оператора «И» выполняются:

$$\begin{array}{l} \text{and}\ \text{tru}\ w = w; \\ \text{and}\ \text{fls}\ w = \text{fls}. \end{array}$$

- Попробуйте найти более «короткую» версию оператора «НЕ».
► Реализуйте оператор «ИЛИ».

Пару (двухэлементный кортеж) можно определить так:

$$\text{pair} \equiv \lambda x\ y\ f.\ f\ x\ y$$

Стандартные операции для пары (проекции):

$$\begin{aligned}\text{fst} &\equiv \lambda p. p \text{ tru} \\ \text{snd} &\equiv \lambda p. p \text{ fls}\end{aligned}$$

► Проверьте, что ожидаемые свойства проекций выполняются:

$$\begin{aligned}\text{fst} (\text{pair } a \ b) &= a; \\ \text{snd} (\text{pair } a \ b) &= b.\end{aligned}$$

Числа (нумералы Чёрча)

$$\begin{aligned}0 &\equiv \lambda s z. z \\ 1 &\equiv \lambda s z. s z \\ 2 &\equiv \lambda s z. s (s z) \\ 3 &\equiv \lambda s z. s (s (s z)) \\ 4 &\equiv \lambda s z. s (s (s (s z))) \\ &\dots\end{aligned}$$

Выражение $F^n(X)$, где $n \in \mathbb{N}$, а $F, X \in \Lambda$, определим индуктивно:

$$\begin{aligned}F^0(X) &\equiv X; \\ F^{n+1}(X) &\equiv F(F^n(X)).\end{aligned}$$

Тогда n -ое число Чёрча :

$$n \equiv \lambda s z. s^n(z).$$

Проверка числа на ноль ($0 \equiv \lambda s z. z$):

$$\text{iszro} \equiv \lambda n. n (\lambda x. \text{fls}) \text{ tru}$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства `iszro` выполняются.
- Попробуйте найти более «короткую» версию `iszro`.

Функция следования для чисел Чёрча

$$\text{succ} \equiv \lambda n s z. s (n s z)$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства `succ` выполняются.
- Попробуйте найти другое определение `succ`.

Функция сложения чисел Чёрча

$$\text{plus} \equiv \lambda m n s z. m s (n s z)$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства `plus` выполняются.
- Попробуйте найти определение `plus` с использованием `succ`.

Функция умножения чисел Чёрча

$$\text{mult1} \equiv \lambda m n. m (\text{plus } n) 0$$

$$\text{mult2} \equiv \lambda m n s z. m (n s) z$$

- ▶ Проверьте, что ожидаемые свойства умножения выполняются.
- ▶ Можно ли `mult2` записать короче?

Домашнее задание

- ▶ Выполните подстановку

$$\begin{array}{ll} \lambda y z. x y w, (z x) & [x := \lambda y. y w] \\ \lambda x y. x y (\lambda x. x y) x & [x := \lambda z. z] \\ x y (\lambda x z. x y z) y & [y := x z] \end{array}$$

Определите, возможно ли в получшемся терме выполнить β -преобразование.
(1 балл)

- ▶ Уберите лишние скобки и при возможности выполните β -преобразование

$$\begin{array}{l} (x (\lambda x. ((x y) x)) y) \\ ((\lambda p. (\lambda q. ((q (p r)) s))) ((q (p r)) s)) \end{array}$$

(1 балл)

- ▶ Покажите, что для любых M и N выполняется

$$\lambda x. M N = S (\lambda x. M) (\lambda x. N)$$

(1 балл)

- ▶ Покажите, что

$$\begin{array}{l} \mathbf{S K K} = \mathbf{I} \\ \mathbf{B} = \mathbf{S (K S) K} \end{array}$$

(2 балла)

- ▶ Реализуйте функцию возведения в степень для чисел Чёрча. (2 балла)