

## Рекуррентные формулы.

1. Решить следующие линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка:

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 6;$$

$$a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 6;$$

$$a_{n+2} = 2\sqrt{2}a_{n+1} - 4a_n, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 2.$$

2. Построить общее решение рекуррентного соотношения вида

$$a_{n+5} = 2a_{n+4} + 16a_{n+1} - 32a_n.$$

3. Доказать, что наибольший общий делитель чисел Фибоначчи  $F_n$  и  $F_m$  есть число Фибоначчи  $F_d$ , где  $d$  есть наибольший общий делитель чисел  $n$  и  $m$ :

$$\gcd(F_n, F_m) = F_d, \quad d = \gcd(n, m).$$

4. На плоскости нарисованы  $n$  окружностей так, что любая пара окружностей пересекается ровно по двум точкам, и никакие три окружности не имеют общей точки пересечения. Определить количество  $a_n$  областей, на которые разбивается плоскость такими окружностями.
5. Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 6 \cdot 3^n.$$

6. Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 3 \cdot \sin(n\pi/2).$$

7. Космический зонд обнаружил, что органическое вещество на Марсе имеет ДНК, состоящее из пяти символов  $(a, b, c, d, e)$ . Четыре пары символов —  $ce, cd, ed, ee$  — никогда не встречаются в марсианских ДНК, однако любая цепочка, не содержащая этих пар, возможна. Порядок букв в цепочке важен, поэтому, например, цепочка  $bbdca$  возможна, а  $bbcda$  — нет. Найти рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют эти цепочки слов. Построить решения этих рекуррентных соотношений.

8. Доказать, что возможна, вообще говоря, фибоначчьева система исчисления, показав, что любое натуральное число  $N$  можно единственным образом представить в виде суммы

$$N = a_2 F_2 + \dots + a_n F_n,$$

в которой коэффициенты  $a_i$  равны 0 или 1, а кроме того, никакие два идущих подряд элемента последовательности чисел  $\{a_i\}$  не равны одновременно единице.

9. Вывести рекуррентную формулу для количества путей Моцкина. Пути Моцкина строятся аналогично путям Дика, только также разрешены горизонтальные ходы.