Задачи (оптимальные градиентные методы)

1. Дана матрица
$$\begin{pmatrix} 1+\beta-\alpha\lambda & -\beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
где α, β, λ – вещественные положительные числа.

   - При каком условии на β, α, λ собственные числа матрицы являются комплексными? Какова их амплитуда в этом случае?
   - При каком условии на α, β предыдущий пункт выполняется для любого λ на отрезке $[m, M]$, $m > 0$?
   - При каком α, β собственные числа матрицы являются комплексными, а их амплитуда минимальна при в худшем случае при $\lambda \in [m, M]$?
   - Используя посчитанные α, β применить *метод тяжелого шарика* для выпуклой квадратичной функции f:
   $$x_{k+1} = x_k - \alpha\nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1})$$
   где m, M – границы спектра матрицы, задающей функцию f.

2. Пусть $f(x) = \frac{1}{2}x^TAx - b^Tx$ – выпуклая квадратичная функция, для которой существует точка $x^* :\ Ax^* = b$. Последовательность x_k задается как
$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k\nabla f(x_k) + \beta_k(x_k - x_{k-1}).$$

   - Показать, что $x_k - x^* = P_k(A)(x_0 - x^*)$, где $P_k(\cdot)$ – полином степени k, удовлетвояющий $P_k(0) = 1$ (при условии $b_1 = 0$).
   - Пусть m, M – границы спектра A. Подобрать α_k, β_k так, чтобы $P_k(t)$ был многочленом Чебышева на отрезке $[m, M]$, т. е.
   $$P_k(t) = \frac{T_k\left(\frac{M+m-2t}{M-m}\right)}{T_k\left(\frac{M+m}{M-m}\right)}.$$

3. Реализовать *метод Нестерова* для функции
$$f(x, y) = e^{x+3y-0.1} + e^{x-3y-0.1} + e^{-x-0.1}$$