Список вопросов к коллоквиуму по математическому анализу
АУ, третий семестр, осень 2016 года

Глава VIII. Функции нескольких переменных

1. ! Локальные экстремумы. Определение и необходимое условие экстремума. Стационарные точки.

2. Квадратичная форма. Положительная и отрицательная определенность. Оценка снизу положительно определенной квадратичной формы. Достаточные условия экстремума.

3. Обратные отображения. Оценка на норму обратного отображения. Теорема об обратимости отображений, близких к обратимым.

4. Теорема об обратной функции. Выбор окрестности. Шаги 1–2 (инъективность и открытость образа).

5. Теорема об обратной функции. Выбор окрестности. Шаги 3–4 (дифференцируемость и непрерывная дифференцируемость обратной функции). Следствие об открытости отображения.

6. Теорема о неявной функции.

7. ! Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

8. Наибольшее и наименьшее значения квадратичной формы на сфере. Формула для нормы матриц.

9. Расстояние от точки до гиперплоскости.

Глава IX. Мера

10. Алгебра и σ-алгебра множеств. Определение, свойства, примеры. Теорема о существовании минимальной σ-алгебры содержащей данное семейство множеств. Борелевская оболочка и борелевские множества.

11. Лемма про дизъюнктное объединение множеств. Кольцо и полукольцо. Теорема о свойствах элементов полукольца.

12. Произведение полуколец. Параллелепипеды и ячейки. Связь между ними.

13. ! Полукольца ячеек. Представление открытого множества в виде объединения ячеек. Следствие.

14. Аддитивные функции множеств. Объем. Примеры. Свойства объема на полукольце.

15. Произведение объемов. Следствие для классического объема.

16. ! Мера: определение и примеры. Теорема о счетной полуаддитивности.

17. Две теоремы о том, когда конечно аддитивная функция является мерой.

18. Субмеры. Мера как сужение субмеры. Полная мера.

19. Внешняя мера. Теорема о продолжении меры с полукольца.

20. Теорема о внешней мере множества. Следствие о структуре измеримых множеств.

21. Монотонный класс. Теорема о единственности продолжения меры.

22. ! Счетная аддитивность классического объема. Определение меры Лебега. Свойства меры Лебега 1–6.

23. ! Свойства меры Лебега 7–14. Пример несчетного множества, имеющего нулевую меру. Пример неизмеримого множества.

24. Регулярность меры Лебега. Следствия.

25. ! Инвариантность меры Лебега относительно сдвига. Единственность такой меры. Инвариантность меры Лебега относительно движения.

Глава X. Интеграл Лебега

26. ! Измеримые функции: примеры, эквивалентные определения, свойства.

27. Измеримость $\inf f_n$, $\sup f_n$, $\underline{\lim}\, f_n$, $\overline{\lim}\, f_n$, $\lim f_n$. Измеримость функций $\varphi \circ f$.

28. Арифметические операции с измеримыми функциями. Измеримость непрерывной функции.

29. ! Простые функции. Свойства. Приближение неотрицательной измеримой функции простыми. Следствия.

30. ! Различные виды сходимости последовательности функций. Единственность (с точностью до множества меры 0) предельных функций.

31. Теорема Лебега о сходимостях. Примеры (существенность условий и необратимость утверждения).

32. Теорема Рисса. Следствие. Теоремы Егорова, Фреше и Лузина (без доказательства).

33. ! Интеграл от простой функции. Свойства. Определение интеграла Лебега. Элементарные свойства интеграла от неотрицательной функции (до теоремы Беппо Леви).

34. ! Теорема Беппо Леви.

35. Линейность и аддитивность интеграла, положительность интеграла. Пример.

Примечания

Особо важные вопросы помечены восклицательным знаком.

Незнание хотя бы одной из следующих определений и формулировок влечет оценку “неудовлетворительно”: определения дифференцируемости отображения, градиента, матрицы Якоби, производных по направлению, частных производных; экстремального свойства градиента; связи между дифференцируемостью и существованием частных производных; многомерной формулы Тейлора; теорем об обратной и неявной функции; определение точек экстремума и условного экстремума, а также методов их отыскания; определений полукольца, σ-алгебры, меры, конструкций стандартного продолжения меры и произведения мер, определений и важнейших свойств меры Лебега, измеримых функций, интеграла по мере, теоремы Леви, понятие “почти везде”.