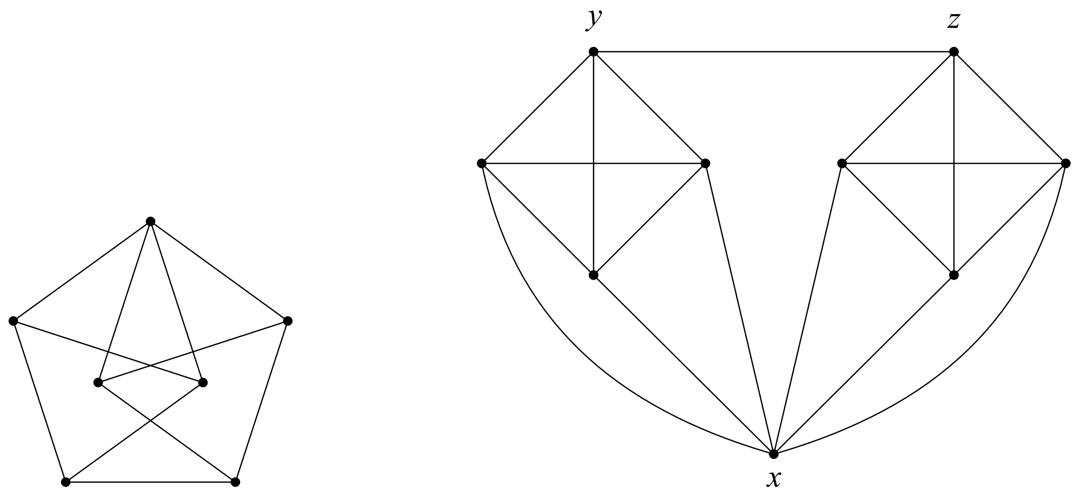
# 1 Домашние задачи. Раскраски

**1.1** (0,5 балла). Сосчитать хроматическое число $\chi(G)$, кликовое число $\omega(G)$ и число независимости $\alpha(G)$ для графа, изображенного на рис.1, a.




(a) (b)

Рис. 1

**1.2** (0.5 балл). Определить хроматическое число графа $G$, показанного на рис.1, b.

**1.3** (1,5 балла). Доказать, что в любом графе $G$ существует такое линейное упорядочение его вершин, при котором жадный алгоритм раскраски окрасит вершины графа ровно в $\chi(G)$ цветов.

**1.4** (1,5 балла). Рассмотрим множество прямых на плоскости, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Образуем граф $G$, вершинами которого будут являться точки пересечения этих прямых, а ребрами — отрезки, соединяющие две соседние точки пересечения на одной прямой. Доказать, что $\chi(G) \leqslant 3$.

**1.5** (1,5 балла). Доказать, что для графа $G$, в котором любая пара нечетных циклов пересекается хотя бы по одной вершине, хроматическое число $\chi(G) \leqslant 5$.

**1.6** (1 балл). Доказать, что в случае $k$-критического графа $\delta(G) \geqslant k - 1$.

**1.7** (1 балл). Использовать результаты упражнения 1.6 для доказательства неравенств

$$\chi(G) \leqslant \Delta + 1 \qquad \text{и} \qquad \chi(G) \leqslant \frac{2m}{n} + 1,$$

где $n$ — количество вершин, а $m$ — число ребер графа $G$.

**1.8** (1 балл). Доказать, что любой граф $G$ с $\chi(G) = k$ имеет по крайней мере $k$ вершин, степень которых больше или равна $k - 1$.

**1.9** (1,5 балла *[1]). В упражнении 0.7 с практики мы, по сути, доказали, что в случае $k$-хроматического графа $G$ количество $m$ ребер ограничено снизу величиной $\binom{k}{2}$. Как изменится эта оценка в случае связного графа $G$? (Имеется в виду, что нужно дать более строгую оценку, если известно, что граф связный.)
Указание. Для оценки количества ребер связного графа можно воспользоваться результатами упражнений 1.6 и 1.8.

[1]Задачи со звёздочкой (*) — необязательные, за их решение вы получите баллы, но полный балл можно получить и без них. Если решить вообще все задачи, то можно получить больше ста процентов.