DL 65. В связном графе есть остовное дерево, в котором k висячих вершин и есть остовное дерево, в котором m висячих вершин. Докажите, что для любого числа ℓ между k и m в этом графе найдется остовное дерево, в котором ℓ висячих вершин.

DL 66. Пусть Ω — конечное пространство элементарных событий, P — вероятностная мера на Ω. Докажите формулу включений-исключений: для любых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ выполняется

$$P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots$$

DL 67. Пусть $\mathcal{F}$ — такое семейство подмножеств $[n]$, что для любых двух $A, B \in \mathcal{F}$ выполняется $A \cap B \neq \emptyset$. Покажите, что $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$.

DL 68. Приведите пример X_0, X_1, X_2:

а) $(\forall\, i \neq j : P(X_i \cap X_j) = P(X_i)P(X_j)) \land P(X_0 \cap X_1 \cap X_2) \neq P(X_0)P(X_1)P(X_2)$;

б) $(\forall\, i \neq j : P(X_i \cap X_j) \neq P(X_i)P(X_j)) \land P(X_0 \cap X_1 \cap X_2) = P(X_0)P(X_1)P(X_2)$.

DL 69. Для двух строк $x, y \in \{0,1\}^n$ обозначим их внутреннее произведение: $x \cdot y = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \bmod 2$. Чему равняется вероятность события $x \cdot y = 1$, если строка y выбирается случайно (и все варианты равновероятны), а строка x фиксирована?

DL 70. Докажите, что любой граф G содержит антиклику мощности хотя бы

$$\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg_G(v) + 1}.$$

DL 71. Докажите, что если вершины неориентированного графа имеют степень не больше, чем k, то его вершины можно покрасить в $k+1$ цвет так, чтобы концы любого ребра были покрашены в разные цвета.

DL 72. Докажите, что если вершины графа имеют степень не больше, чем k, то его вершины можно покрасить в $\frac{k}{2} + 1$ цвет так, чтобы для каждой вершины не более одного ребра исходило в вершины того же цвета.

DL 73. В сильно связном ориентированном графе (из каждой вершины можно добраться в каждую) у каждой вершины входящая степень равна исходящей. Докажите, что существует цикл, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз.

DL 74. В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины выходит по крайне мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

DL 75. Пусть функция `CONN` принимается на вход ребра графа и возвращает 1 тогда и только тогда, когда данный граф связен.

а) Докажите, что глубина дерева решений функции `CONN` равна $\frac{n(n-1)}{2}$, где n — число вершин входного графа.

б) Оцените размер дерева решений функции `CONN`.

$\boxed{\textbf{DL 33.}}$ Функция голосования $Maj_{2k+1} : \{0,1\}^{2k+1} \to \{0,1\}$ равняется 1 тогда и только тогда, когда хотя бы $k+1$ битов входа равняется единице. Покажите, что существует схема, вычисляющая функцию голосования, размера $O(k)$.

$\boxed{\textbf{DL 64.}}$ В графе четное число вершин и степени всех вершин четны. Докажите, что число остовных деревьев четно.