

Курс: Математическая логика и теория вычислимости
Практика 9-10. Невыразимые предикаты, секвенциальное
исчисление предикатов

Автоморфизмы

Дана сигнатура σ и ее интерпретация с носителем D .

Взаимно-однозначное отображение $\alpha : D \rightarrow D$ называется *автоморфизмом* интерпретации, если все функции и предикаты этой интерпретации *устойчивы* относительно α , а именно для любого предикатного символа P^n и любого функционального символа f^n верно

$$\begin{aligned} [P](\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) &\Leftrightarrow [P](x_1, \dots, x_n) \\ [f](\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) &= \alpha([f](x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

на любых наборах $x_1, \dots, x_n \in D$.

Теорема. Предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно ее автоморфизмов.

Например, отображение $x \mapsto -x$ является автоморфизмом для нормальной интерпретации сигнатуры $(+^2, =^2)$ с носителем \mathbb{Z} и $[+] = +$.
Невыразимый предикат: $x < y$.

► Пример с лекции. Сигнатура $(<^2, =^2)$, носитель \mathbb{Z} , естественная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 0$. Найдите автоморфизм, относительно которого данный предикат неустойчив.

► Сигнатура $(+^2, <^2, =^2)$, носитель \mathbb{Q} , естественная интерпретация. (1) Невыразимый предикат $x = 1$. Найдите автоморфизм, относительно которого данный предикат неустойчив. (2) Есть ли здесь выразимый предикат вида $x = C$? (3) Верна ли невыразимость $x = 1$ для \mathbb{R} ? (4) Для \mathbb{Z} ?

► Сигнатура $(0^0, 1^0, <^2, =^2)$, носитель \mathbb{R} , естественная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 1/2$. Найдите автоморфизм, относительно которого данный предикат неустойчив.

► (ДЗ) Сигнатура $(f^1, =^2)$, носитель \mathbb{Z} , нормальная интерпретация, $[f](x) = x + 2$. Невыразимый предикат $y = x + 1$. Найдите автоморфизм, относительно которого данный предикат неустойчив.

► (ДЗ) Сигнатура $(=^2, P^2)$, носитель \mathbb{N}_+ , нормальная интерпретация, $[P](x, y) = 'x \text{ делит } y'$. Невыразимый предикат $x = 2$. Найдите автоморфизм, относительно которого данный предикат неустойчив.

Секвенциальное исчисление предикатов

Правила введения конъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} (\vdash \wedge)$$

Правила введения дизъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} (\vee \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} (\vdash \vee)$$

Правила введения импликации в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} (\rightarrow \vdash) \quad \frac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} (\vdash \rightarrow)$$

Правила введения отрицания в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} (\neg \vdash) \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} (\vdash \neg)$$

Правила введения квантора \exists в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A[x := y], \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A, \Gamma \vdash \Delta} (\exists \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A[x := \tau], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta} (\vdash \exists)$$

Правила введения квантора \forall в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A[x := \tau], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A, \Gamma \vdash \Delta} (\forall \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A[x := y], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta} (\vdash \forall)$$

Переменная y не должна входить свободно в Γ и Δ . От всех подстановок требуется корректность.

Аксиома (схема):

$$\overline{A, \Gamma \vdash A, \Delta}$$

Правила сокращения (contraction):

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \quad (C \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \quad (\vdash C)$$

Правила перестановки (permutation):

$$\frac{\Gamma, A, B, \Theta \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Theta \vdash \Delta} \quad (P \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Theta} \quad (\vdash P)$$

Можно использовать <http://logitext.mit.edu/>

► (Разминка) В секвенциальном исчислении предикатов постройте дерево вывода для формулы

$$\vdash \exists x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$$

► В секвенциальном исчислении предикатов постройте дерево вывода для формулы

$$\vdash \exists x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

► В секвенциальном исчислении предикатов постройте дерево вывода для формулы

$$\vdash \forall x Q(x, x) \rightarrow \forall x \exists y Q(x, y)$$

► В секвенциальном исчислении предикатов постройте дерево вывода для формулы

$$\forall x (P(g(x)) \rightarrow P(x)) \vdash \forall x (P(g(g(x))) \rightarrow P(x))$$

► (ДЗ) В секвенциальном исчислении предикатов постройте дерево вывода для формулы

$$\vdash \exists y \forall x Q(x, y) \rightarrow \exists x Q(x, x)$$

► (ДЗ) В секвенциальном исчислении предикатов постройте дерево вывода для формулы

$$\vdash \exists x (P(y) \vee P(f(z))) \rightarrow P(x)$$

► (ДЗ) В секвенциальном исчислении предикатов постройте дерево вывода для формулы

$$\vdash \exists x \forall y (P(x) \rightarrow P(y))$$