Домашнее задание по математическому анализу №3 на 27 марта
Тема: интегральные суммы, теоремы о среднем, применение определённых интегралов

1. Докажите неравенства:

$$\text{а) (1) } \frac{4}{9}(e-1) < \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)(2-x)}dx < \frac{1}{2}(e-1);$$

$$\text{б) (1) } \sin(1) < \int_{-1}^1 \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx < 2\sin(1);$$

2. (1) Найдите

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{\int\limits_a^x \frac{\sin p^2}{p}\,dp}^{\int\limits_x^a \frac{\sin t^2}{t}\,dt} \frac{\sin t^2}{t}\,dt \right).$$

3. (1) Найдите $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\,dt}$.

4. Найдите предел последовательности s_n, заданной формулой (будьте аккуратны в обосновании)

а) (1 балл)

$$s_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \sqrt[3]{(nx+k)^2(nx+k+1)},\ x>0;$$

б) (1 балл)

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right);$$

в) (1 балл) Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^n \sqrt{k(n-k)}.$$

5. (1 балл) Вычислите $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\sin nx$ с точностью до $O(1/n^3)$.

6. (2 балла) Найдите $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m(x)\sin((m+2)x)\,dx, \quad m\in\mathbb{N}$.

7. (1 балл) Вычислите

$$\int\limits_0^\infty \sin(x\ln(x))\,dx.$$

8. Вытекает ли из сходимости интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходимость интегралов

а) (1 балл)

$$\int\limits_1^{+\infty} f^3(x)\,dx,$$

б) (1 балл)

$$\int\limits_{1}^{+\infty} |f(x)| \frac{dx}{x^2}.$$

9. а) (1 балл) Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная и периодическая с периодом $T > 0$. Докажите, что для всех пар $a < b$

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_{a}^{b} f(nx)\, dx = \frac{b-a}{T} \int\limits_{T}^{0} f(x)\, dx.$$

б) (1 балл) Предположим, что $f \in C([-1;1])$. Вычислите предел

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \int\limits_{0}^{n} f(|\sin(x)|)\, dx.$$

10. (**Очень важная задача про очень важный интеграл**

а) (1 балл) Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0; n]$. Докажите, что

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

б) (1 балл) Найдите асимптотику

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{n}} e^{-n^2}\, dx$$

с точностью до $o(1)$ при $n \to +\infty$.

в) (1 балл) Вычислите $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

11. а) (3 балла) Докажите следующую теорему о среднем (одну из **формул Боне**): пусть f — положительная, строго убывающая, непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция, тогда существует такое значение $\xi \in [a; b]$, что

$$\int\limits_{a}^{b} f(x) g(x)\, dx = f(a) \int\limits_{a}^{\xi} g(x)\, dx.$$

б) (3 балла) Докажите, что

$$0 < \int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, dx < \frac{1}{100\pi}.$$