

## Задание 2

26.02.2017

**FL 5** (Только группа практики 2)

a) Докажите утверждение:  $L, M$  распознаётся DFA  $\implies L \cap M$  распознаётся DFA.

b) Если для некоторых языков  $L, M$  их пересечение  $L \cap M$  распознаётся некоторым DFA, обязательно ли  $L$  и  $M$  распознаются некоторыми DFA?

**FL 7** Докажите, что язык

a)  $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

b)  $\{a^n b^m \mid n \neq m\}$

c)  $\{a^n b^m \mid m, n \geq 0, \gcd(m, n) > 1\}$

не распознаётся никаким DFA.

**FL 8** Докажите, что класс распознаваемых DFA языков замкнут относительно операции

a)  $\sqrt{L} = \{m \mid mm \in L\}$

b)  $L^R = \{m^R \mid m \in L\}$ , где  $(a_1 a_2 \dots a_n)^R = a_n a_{n-1} \dots a_1$

**Определение.** Будем говорить, что язык  $L$  отделяет слова  $x$  и  $y$ , если существует такое слово  $z$ , что ровно одно из слов  $xz, yz$  принадлежит  $L$ . Для неотделимых языком  $L$  слов  $x, y$  будем писать  $x \equiv_L y$ .

Индексом  $L$  назовём супремум размеров множеств, в которых все строки попарно отделимы языком  $L$ .

**FL 9** Докажите, что

a) язык  $L$  распознаётся некоторым DFA тогда и только тогда, когда индекс  $L$  конечен.

b) более того, индекс языка равен минимальному размеру распознающего  $L$  автомата.

**FL 10** Пусть язык  $L$  распознаётся некоторым DFA. Всегда ли следующие языки распознаются DFA?

a)  $L/L' = \{u \mid \exists v : uv \in L, v \in L'\}$ , где  $L' \subseteq \Sigma^*$  — произвольный язык.

b)  $PERMUTE(L) = \{a_{k_1}, \dots, a_{k_n} \mid n \geq 0, (k_1, \dots, k_n) \text{ — некоторая перестановка, } a_i \in \Sigma, a_1, \dots, a_n \in L\}$

c)  $SUBSEQ(L) = \{a_1, \dots, a_n \mid n \geq 0, a_i \in \Sigma, \exists u_0, \dots, u_n \in \Sigma^* : u_0 a_1 u_1 a_2 \dots, a_n u_n \in L\}$

d)  $\frac{1}{2}L = \{u \mid u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^* : |u| = |v|, uv \in L\}$

e)  $SHIFT(L) = \bigcup_{k \geq 0} \{a_{k+1}, \dots, a_n a_1, \dots, a_k \mid a_1, \dots, a_n \in L\}$

**FL 11** Пусть  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Введём обозначение:

$B_k(A) = \{w \mid w \text{ — представление некоторого числа из } A \text{ в } k\text{-ичной системе счисления}\}$

Приведите пример множества  $A$ , для которого  $B_2(A)$  распознаётся DFA, а  $B_3(A)$  не распознаётся DFA.

**Определение.** Будем говорить, что DFA синхронизируется строкой  $s$ , если  $\forall q_1, q_2 \in Q : \delta(q_1, s) = \delta(q_2, s)$ .

**FL 12** Докажите, что если детерминированный автомат  $A$  имеет  $k$  состояний и синхронизируется некоторой строкой, то он также синхронизируется и строкой длины не более  $k^3$ .