19 октября 2017

1. Верно ли, что каждый простой эйлеров граф имеет четное количество ребер? А простой эйлеров граф, построенный на четном количестве вершин? А эйлеров двудольный граф?

2. Верно ли, что в эйлеровом графе для любых двух ребер e_1 и e_2, инцидентных одной и той же вершине, обязательно найдется хотя бы один эйлеров цикл, в котором два эти ребра идут одно за другим?

3. Доказать, что в любом связном графе G найдется маршрут, который проходит по каждому из ребер графа G как максимум два раза.

4. Пусть в связном графе G ровно $2k$ вершин имеют нечетную степень. Доказать, что в этом графе можно построить k эйлеровых путей (k реберно непересекающихся путей, покрывающих все ребра).

5. Имеется кусок проволоки длиной 12 сантиметров. На какое минимальное количество кусков его следует разрезать, чтобы из этих кусков можно было бы изготовить каркас кубика размерами $1 \times 1 \times 1$ при условии, что проволоку в процессе изготовления кубиков можно сгибать?

6. Ранее мы доказали, что любой граф G, минимальная степень δ в котором больше или равна двух, обязательно содержит цикл. Используя это утверждение и индукцию по количеству m ребер, дать еще одно доказательство достаточности условия Эйлера в неориентированном графе G.

7. Реберным графом $L(G)$ графа G называется граф, в котором любая вершина x' отвечает некоторому ребру $e \in E(G)$ графа G, и в котором две вершины смежны между собой тогда и только тогда, когда соответствующие им ребра в графе G инцидентны одной и той же вершине. Доказать, что в случае регулярного связного графа G его реберный граф $L(G)$ является эйлеровым.

8. Построить для значений $n = 2$, $k = 4$ граф де Брейна и с его помощью найти хотя бы одну последовательность де Брейна $B(2, 4)$.

9. Мы знаем, что существуют две последовательности де Брейна $B(2, 3)$, а именно, бинарные циклические последовательности

   $$00010111 \qquad \text{и} \qquad 11101000,$$

   в каждой из которых любой возможный 3-мер встречается ровно один раз в виде подпоследовательности $a_i a_{i+1} a_{i+2}$. Доказать, что не существует бинарной циклической последовательности, состоящей из восьми символов, которая бы ровно один раз содержала любой из восьми возможных тримеров в качестве подпоследовательности вида $a_i a_{i+1} a_{i+3}$.