

DL 12.1. Вася побывал в опасном месте, где он мог с вероятностью 0.8 заболеть. Вася прошел обследование в двух клиниках, известно, что первая клиника выявляет заболевание (если оно есть) с вероятностью 0.5 (и не выявляет, если заболевания нет), а вторая клиника выявляет заболевание с вероятностью 0.75. Клиники работают независимо друг от друга. С какой вероятностью Вася заболел, если ни одна из клиник заболевание не обнаружила?

Определение 12.1. Дисперсия $D[X]$ случайной величины X — $D[X] \stackrel{\text{def}}{=} E[(X - E[X])^2]$.

DL 12.2. Покажите, что для любой случайной величины X выполнено:

- $D[X] = E[X^2] - E[X]^2$;
- $\Pr[X = 0] \leq \frac{D[X]}{E[X]^2}$.

DL 12.3. (Коды Уолша-Адамара)

- Каждому $a \in \{0, 1\}^n$ соответствует линейная функция $f_a : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, определяемая так: $f_a(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i \bmod 2$. Кодом Уолша-Адамара строки $a \in \{0, 1\}^n$ называется таблица значений функции f_a и обозначается $\text{WH}(a)$, нетрудно понять, что длина строки $\text{WH}(a)$ равняется 2^n . Проверьте, что для двух различных строк $a, b \in \{0, 1\}^n$ их коды $\text{WH}(a)$ и $\text{WH}(b)$ отличаются ровно в половине позиций.
- Предположим, что у нас есть оракульный доступ к строке Z (это значит, что можно делать запросы к строке Z , за один запрос можно узнать один бит строки Z), которая отличается от $\text{WH}(a)$ не более, чем в доле $\frac{1}{4} - \epsilon$ позиций, где ϵ — это некоторая константа, причем строка $a \in \{0, 1\}^n$ нам неизвестна. Придумайте вероятностный алгоритм, который для всех $x \in \{0, 1\}^n$ вычислит $f_a(x)$ с вероятностью как минимум $\frac{9}{10}$, причем этот алгоритм может делать лишь константное число запросов к строке Z и работать полиномиальное от n время.

DL 12.4. Назовем вероятностной булевой схемой такую схему, часть входов которой называются случайными битами. Пусть схема C имеет $n + m$ входов, первые n входов мы будем понимать как непосредственно входы, оставшиеся m входов как случайные биты. Будем говорить, что схема C вычисляет функцию $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ с ограниченной ошибкой, если для каждого $x \in \{0, 1\}^n$ выполняется $\Pr_r[f(x) = C(x, r)] \geq \frac{2}{3}$, где вероятность берется по случайной строке r , которая принимает все значения из множества $\{0, 1\}^m$ с равными вероятностями. Пусть функция $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ вычисляется вероятностной схемой C размера s с ограниченной ошибкой. Покажите, что:

- для каждого многочлена $p(n)$ найдется такая вероятностная схема C' с $n + m'$ входами, размер которой полиномиален относительно sn , что при всех $x \in \{0, 1\}^n$ выполняется $\Pr_r[f(x) = C'(x, r)] \geq 1 - 2^{-p(n)}$, где вероятность берется по случайной строке r , которая принимает все значения из множества $\{0, 1\}^{m'}$ с равными вероятностями;
- найдется обычная схема с n входами, размер которой полиномиален относительно sn , что для всех $x \in \{0, 1\}^n$ выполняется $f(x) = C(x)$.

DL 11.3. Пусть есть бинарное дерево и в нем n листьев. Пусть $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ — это глубины всех листьев дерева. Докажите, что:

- $\sum_{i=1}^n 2^{-\ell_i} \leq 1$;
- если $\sum_{i=1}^n 2^{-\ell_i} \leq 1$, то найдётся дерево из n листьев с глубинами $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$.

DL 11.4. Пусть есть бинарное дерево и в нем n листьев. Покажите, что:

- глубина хотя бы одного листа не меньше $\log n$;
- средняя глубина листа не меньше $\log n$.

(Более строгая формулировка: рассмотрим случайную величину, которая выбирает случайный лист и выдает его глубину; докажите, что математическое ожидание этой случайной величины не меньше $\log n$.)

DL 10.3.

- Докажите, что в сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.

DL 10.4. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

DL 10.5. Доминирующее множество в графе — это такое множество, что для каждой вершины, либо она сама лежит в этом множестве, либо она соединена ребром с вершиной из этого множества. В графе G минимальная степень вершины равняется $d > 1$. Докажите, что в G есть доминирующее множество размера не больше $n^{\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}}$.

Подсказка: рассмотрите случайное подмножество вершин, в которое каждая вершина включается с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$.

DL 9.1. Пусть каждая вершина неориентированного графа имеет степень не больше, чем k . Докажите, что вершины графа можно покрасить

- в $\lceil k/2 \rceil + 1$ цвет так, чтобы для каждой вершины не более одного ребра исходило в вершины того же цвета ($\lceil x \rceil$ обозначает целую часть числа x).

DL 8.6. В связном графе на каждом ребре написали положительное вещественное число. Вес остовного дерева — это сумма чисел на рёбрах, содержащихся в этом дереве. Докажите, что:

- минимальное по весу остовное дерево содержит хотя бы одно ребро минимального веса;
- каждое ребро минимального веса содержится хотя бы в одном из остовных деревьев минимального веса.

DL 7.1. Вычислите суммы:

- $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^m \cdot \binom{n}{k}$, где $m < n$.

DL 7.3.

- Покажите, что число ломанных, из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, пересекающих прямую $y = -1$, равняется числу ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, -2)$.
- Найдите число ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Это число называется числом Каталана C_n .
- Покажите, что $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$.

DL 7.6.

- а) Докажите, что любое семейство непересекающихся интервалов на прямой конечно или счетно.
- б) Докажите, что множество точек строгого локального минимума любой функции из $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ конечно или счетно.

DL 7.7. Докажите, что если множество на плоскости содержит отрезок, то оно равно-мощно \mathbb{R} .

DL 5.6. Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трёхместный предикат S . Интерпретация: носитель — точки на плоскости, $S(X, Y, Z)$ означает, что $|XZ| = |YZ|$. Выразите предикат: A, B, C лежат на одной прямой.

DL 4.3. Докажите, что если булева функция вычисляется с помощью ветвящейся программы размера S , то она вычисляется и с помощью булевой схемы размера $O(S)$.

DL 4.4. Покажите, что если булева функция вычисляется с помощью схемы полиномиального от числа входов размера и глубиной $O(\log(n))$, то она вычисляется и формулой полиномиального от числа переменных размера.

DL 4.6. Правило *ослабления* позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B . Покажите, что если из дизъюнктов D_1, D_2, \dots, D_n семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i , выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

DL 3.3. Как модифицировать рассказанный на лекции алгоритм, проверяющий выполнимость формулы в 2-КНФ, чтобы он за полиномиальное от числа переменных время также выдавал набор значений переменных, который выполняет формулу?

Определение 3.2. Булева функция называется самодвойственной, если выполняется равенство $f(1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n) = 1 - f(x_1, \dots, x_n)$. Булева функция называется линейной, если она имеет вид $f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \pmod 2$, где $a_i \in \{0, 1\}$.

DL 3.5. (Теорема Поста) Пусть есть набор булевых функций, среди которых есть немонотонная, не сохраняющая ноль (т. е., $f(0, \dots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т. е., $g(1, \dots, 1) = 0$), нелинейная, несамоодвойственная. Докажите, что:

- с) если набор булевых функций не удовлетворяет условию теоремы Поста, то через композицию этих функций нельзя выразить все булевы функции.

DL 2.2. Булева функция $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ называется монотонной, если при $x \leq y$ выполняется $f(x) \leq f(y)$ ($x \leq y$, если для всех $1 \leq i \leq n$ выполняется $x_i \leq y_i$). Докажите, что:

- б) монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки \vee и \wedge .