NL-completeness

Полный язык в NL.

Какие сведения можно использовать?

Если брать poly сведения, то все сводятся у NL к любому нетривиальному языку.

Когда определяем полную задачу для класса, она должна отображать сложность феномена который мы хотим изучать.

NL ? L. => можно использовать сведения не мощнее L.

Но! Log-space машина не ~~успеет~~ сможет записать выход ей не хватит места.

Def

- Write-once output tape
  Logspace Reduction
- $f: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ полиномиально-огран функция $f(x) \le |x|^c \; \forall x$.

f – неявно ~~логарифмически~~ space вычислима если языки

$L_f = \{ \langle x, i \rangle \mid f(x)_i = 1 \}$
$L_{f'} = \{ \langle x, i \rangle \mid i \le f(x) \}$ лежат в L.

Грубо говоря получив на вход $\langle x, i \rangle$ мы сможем выдать $f(x)_i$.

A логспейс сводится к B если $\exists$ неявно logspace выч. функция $f: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ s.t.

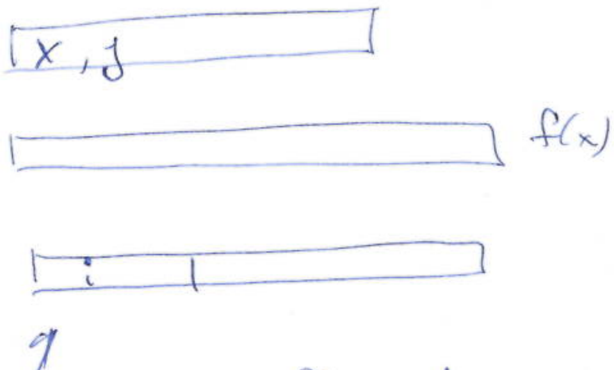
$x \in A$ iff $f(x) \in B$. $\forall x$.

Lemma (i) $A \le_\ell B$, $B \le_\ell C \Rightarrow A \le_\ell C$

(ii) $A \le_\ell$, $B \in L \Rightarrow A \in L$.

Proof (ii) follows obviously from (i).

(i)



Run M_g on $f(x)$. when we need $f(x)_i$ we run $M_f(x, i)$

$\cancel{O(\log|g(f(x))|}$ + space M_g + space M_f + $\log|f(x)|$.

Def NL complete language.

Theorem PATH is NL-complete.

(i) PATH is NL – proved before

(ii) PATH is NL-hard.

L- ~~lang~~ язык из NL $\Rightarrow \exists$ MT M.

Рассмотрим граф конфигураций

$G_{M,x}$

$x \in L$ iff $C_{start(G_{M,x})} \rightsquigarrow C_{accept(G_{M,x})}$

$\Rightarrow$ единственное что можно сделать это вычислить $G_{M,x}$ (для этого можно вычислить матрицу смежности, то есть за log памяти проверить что из конф C мы можем попасть в C', достаточно просимулировать машину на 1 шаг.

2

Определение NL с помощью сертификата

Подсказка может быть полиномиальной, где тогда её хранить?

Def $L \in NL$ iff $\exists$ МТ M с доп специальной одноразовой (read-once) лентой и полином p, так что
$x \in L \iff \exists u \in \{0,1\}^{p(|x|)}$ s.t $M(x, u) = 1$

x – input tape
u – special read-once tape.
M использует $O(\log|x|)$ памяти на рабочих лентах

NL = coNL

proof Достаточно показать, что $\overline{PATH} \in NL$.

~~Представим граф~~
Покажем, что можем решить $\overline{PATH}$ на NL-машине если нам дано кол-во вершин в связной компоненте s. т. е. дано $|N^m(s)|$. m – кол-во вершин.

Перечислим все вершины в лексикограф. возрастании в $|N^m(s)|$ и посчитаем их кол-во если t там не оказалось, то все доказали.

Осталось ~~доказать показать~~, что ~~$N^m(s)$ может~~

Вычислить $N^m(s)$.

~~$N^0(s) \neq$~~ $N^0(s) = s$. будем итеративно находить $|N^1(s)|, |N^2(s)| \dots |N^m(s)|$.

~~Зная $|N^i(s)|$, в лексикограф. возрастании для~~

$s = 0$

for v in G (1)

for u in G

Покажем, что $u \in N^i(s)$

~~Провер Пров~~

Проверить верно ли что есть ребро v, u.

Если есть s++ и go to (1) i.e. v++.

Проверить что перечислили все u из $N^i(s)$.

Проитерировать для $i = 0, 1, 2, \ldots m-1$.

Polynomial Hierarchy ~~and A~~

Классы Σ_2^P и Π_2^P

$\text{INDSET} = \{(G,k) \mid$ G has an independent set of size $\geq k\}$

$\text{EXACT INDSET} = \{(G,k) \mid$ largest ind set has size exactly k.$\}$

$\exists$ ind set of size k $\quad \forall$ set of size $k+1$ не незав.

$\text{MIN-DNF} = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ is DNF formula not equivalent to any smaller DNF$\}$

$= \{\langle\varphi\rangle \mid \forall \psi \ |\psi| < |\varphi| \ \exists s \text{ s.t. } \psi(s) \neq \varphi(s)\}$

$\in$ PSPACE, но считаем что не явл PSPACE-полным.

Def Класс Σ_2^P — это мн-во всех языков L, что $\underbrace{}_{\text{с полиномом } q}$

$\exists$ poly-time MT M s.t.

$$x \in L \iff \exists u \in \{0,1\}^{q(|x|)} \ \forall v \in \{0,1\}^{q(|x|)} \ M(x,u,v) = 1.$$

$\forall x \in \{0,1\}^*$.

Note $NP, coNP \subseteq \Sigma_2^P$.

Def $\Pi_2^P = \{\bar{L}, L \in \Sigma_2^P\}$.

$$x \in L \iff \forall u \ \exists v \ M(x,u,v) = 1.$$

EXACT INSET $\in \Sigma_2^P, \Pi_2^P$.

MIN-DNF $\in \Pi_2^P$, and conjectured to be complete for Π_2^P.

Полиномиальная иерархия

Def Σ_i^P, Π_i^P.

Def $PH = \bigcup_i \Sigma_i^P$

Note $\Sigma_1^P = NP$, $\Pi_1^P = coNP$.

$\Pi_i^P = co\Sigma_i^P$

$\Sigma_i^P \subseteq \Pi_{i+1}^P$.

Properties of poly hierarchy

Conjecture $\Sigma_i^P \subsetneq \Sigma_{i+1}^P$.

Теорема (i) Если $\Sigma_i^P = \Pi_i^P \Rightarrow PH = \Sigma_i^P$

(ii) $P = NP \Rightarrow PH = P$.

Док-во: Покажем только (ii).

$$\underbrace{\exists \underbrace{\forall \exists}_{\in P}}_{A},$$ т.к. $NP = P \Rightarrow$ весь $A \in P$.

□

~~Утв:~~

Def Σ_i^P – полный язык, $\le_p$.

Утв. Если L – PH-полный язык, то $PH = \Sigma_i^P$ для какого-то i.

Док-во $\exists i$ что $L \in \Sigma_i^P \Rightarrow PH \subseteq \Sigma_i^P$. ☒

Note. $PH \subseteq PSPACE$; $PH = PSPACE$ только если иерархия схлопывается.

Example

Σ_i^p SAT $= \exists u_1 \forall u_2 \ldots Q_i u_i \; \varphi(u_1 \ldots u_i) = 1$

u_j - вектор

$\downarrow$

Σ_i^P полная задача.