Домашнее задание 12. 28.11.14

1. а) (1) Доказать, что уравнение $x^n = P_{n-1}(x)$, где P_{n-1} – многочлен с положительными коэффициентами степени $n-1$, имеет единственный положительный корень.

б) (1) Докажите, что уравнение $2^x = 4x$ имеет хотя бы два действительных корня.

2. Докажите, что а)(1) $\mathrm{tg}(x) > x + x^3/3$ при $0 < x < \pi/2$,

б)(2) $\frac{2}{\pi}x < \sin x$ при $0 < x < \pi/2$.

3. (1) Пусть функция f дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем $b > a > 0$. Докажите, что найдется точка $c \in (a,b)$, такая что

$$\frac{af(a) - bf(b)}{a-b} = f(c) + cf'(c).$$

4. Пусть $f_1, f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывные периодические функции с периодами T_1 и T_2 соответственно.

а) (1) Докажите, что если $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_1(x) - f_2(x)) = 0$, то $f_1(x) = f_2(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

б)(2) Напоминание: функция f называется равномерно непрерывной на множестве X, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $x_1, x_2 \in X$ и $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon$.

Теорема: непрерывная функция на компакте равномерно непрерывна на этом компакте.

Докажите, что f_1, f_2 равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$.

в) (3) Докажите, что если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_1(x) - f_2(x)) = 0$, то $f_1(x) = f_2(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

г) (2) Докажите, что функция $f(x) = e^x$ равномерно непрерывна на $(-\infty, 0]$ и не является равномерно непрерывной на $[0, +\infty)$.