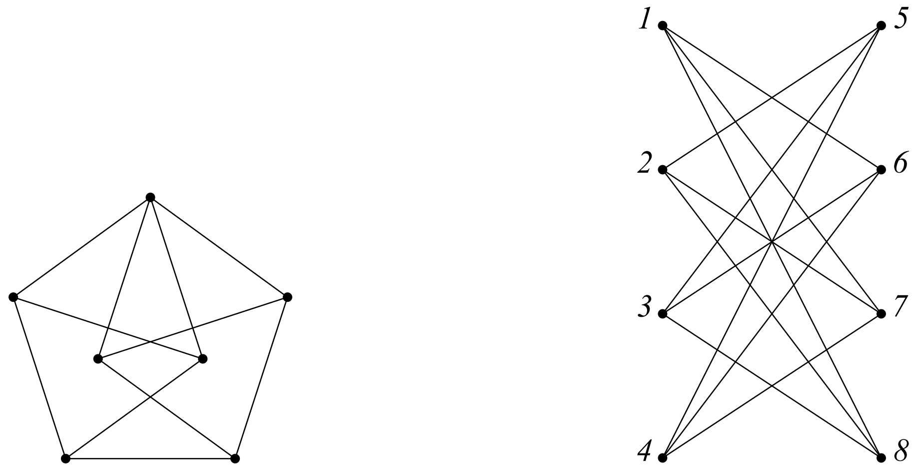
k-раскрашиваемые графы. Теорема Брукса

Практика

1 декабря 2017 г.



(a) (b)

Рис. 1

1. (0.5 балла). Сосчитать хроматическое число $\chi(G)$, кликовое число $\omega(G)$ и число независимости $\alpha(G)$ для графа, изображенного на рис.1,a.

2. (1 балл). Предъявить способ начального упорядочивания вершин графа G, представленного на рис.1,b, для которого жадный алгоритм окрасит вершины в два цвета, а также способ начального упорядочивания вершин, при котором такой алгоритм окрасит вершины графа G в четыре цвета. Обобщить полученные результаты на случай двудольного графа $K^*_{n,n}$, полученного из полного двудольного графа $K_{n,n}$ с блоками $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ удалением ребер $\{x_i, y_i\}$.

3. (1 балл). Определить хроматическое число графа G, показанного на рис.2.

4. (1 балл). Доказать, что хроматическое число $\chi(G)$ любого связного графа G равно максимальному из хроматических чисел его блоков.

5. (1.5 балла). Рассмотрим простой связный граф G, не являющийся регулярным. При доказательстве теоремы Брукса для этого случая мы рекомендовали построить остовное дерево с корнем в вершине степени, меньшей Δ, и присвоить корневой вершине номер, равный $n = |V(G)|$. Затем, используя поиск в ширину, мы можем назначить остальным

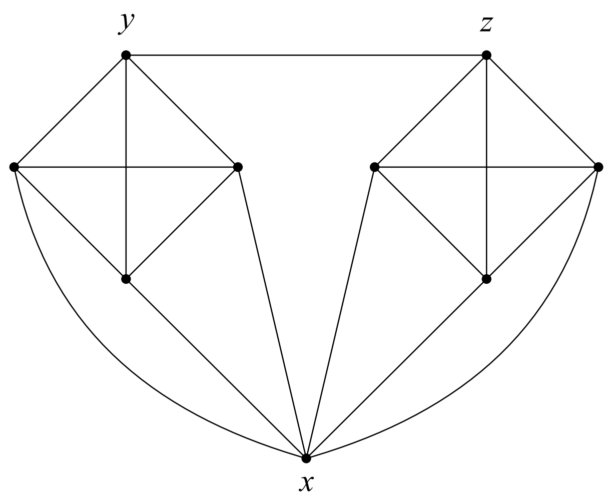


Рис. 2

вершинам номера, значения которых уменьшаются с удалением от корня. При этом мы гарантируем, что жадный алгоритм никогда не окрасит граф G более, чем в Δ цветов.

Казалось бы, мы можем упростить этот алгоритм, упорядочив вершины графа по невозрастанию. В этом случае мы всегда начнем с вершины, степень которой максимальна, и закончим вершиной минимальной степени. Доказать, что подобного рода упрощение не гарантирует нам требуемый результат. Именно, предъявить простой связный граф, вершины которого упорядочены по невозрастанию, для которого жадный алгоритм окрасит вершины графа в $\Delta + 1$ цвет.

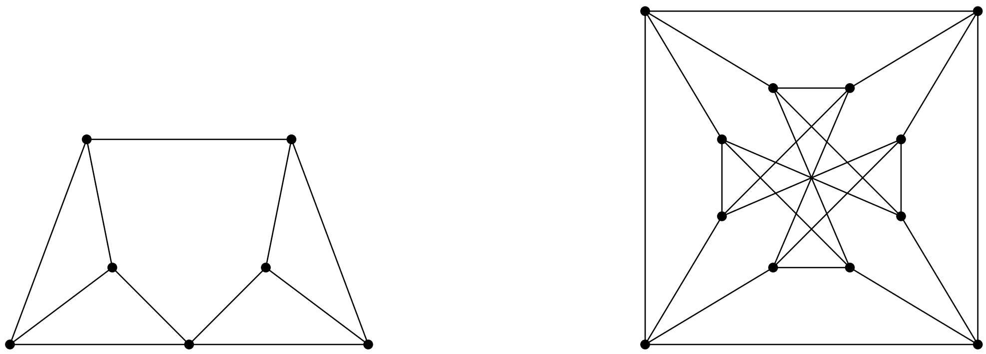
6. (1.5 балла). Доказать, что в любом графе G существует такое линейное упорядочение его вершин, при котором жадный алгоритм раскраски окрасит вершины графа ровно в $\chi(G)$ цветов.

7. (1 балл). Доказать, что для любого графа G, построенного на n вершинах, справедливо неравенство
$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geqslant n, \qquad n = |V(G)|, \tag{1}$$
где $\alpha(G)$ — количество вершин в максимальном вершинно независимом множестве графа G. Верно ли, что для любого k-хроматического графа можно найти такую правильную окраску его вершин в k цветов, что хотя бы одно из подмножеств одноцветных вершин имело мощность, равную $\alpha(G)$?

8. (1.5 балла). Доказать, что изображенные на рис.3 графы являются 4-хроматическими.

9. (1 балл). Доказать, что в графе G с $|E(G)| = m$ ребрами хроматическое число удовлетворяет неравенству
$$\chi(G) \cdot (\chi(G) - 1) \leqslant 2m.$$

10. (2.5 балла). Предположим, что в графе G имеет место такое разбиение множества $V(G)$ вершин графа G, $|V(G)| = n$, на блоки B_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, при котором для любой пары блоков B_i, B_j найдется пара несмежных между собой вершин $x_i \in B_i$, $x_j \in B_j$. Доказать, что такой граф G можно покрасить в $n - m + 1$ цветов.



(a) (b)

Рис. 3: 4-хроматические графы

11. (1.5 балла). Доказать, что для любого простого графа G на n вершинах выполнены следующие неравенства:

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1; \qquad \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geqslant n.$$

12. (1 балл). Пусть $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ есть степенная последовательность простого связного графа G. Доказать, что

$$\chi(G) \leqslant 1 + \max_i \min\{d_i, i - 1\}.$$

13. (1.5 балла). Рассмотрим множество прямых на плоскости, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Образуем граф G, вершинами которого будут являться точки пересечения этих прямых, а ребрами — отрезки, соединяющие две соседние точки пересечения на одной прямой. Доказать, что $\chi(G) \leqslant 3$.

14. (1.5 балла). Пусть l есть длина максимального пути в графе G. Доказать, что $\chi(G) \leqslant l$.

15. (1.5 балла). Доказать, что для графа G, в котором любая пара нечетных циклов пересекается хотя бы по одной вершине, хроматическое число $\chi(G) \leqslant 5$.

16. (1 балл). Доказать, что если $\chi(G - x - y) = \chi(G) - 2$ для любой пары вершин графа G, то G представляет собой полный граф, построенный на $n = \chi(G)$ вершинах.

17. (1 балл). Доказать, что для любой правильной окраски графа G с $\chi(G) = k$ в k цветов для любого цвета i найдется вершина x, окрашенная в этот цвет, которая смежна с вершинами, окрашенными во все оставшиеся $k - 1$ цветов.

18. (1 балл). Описать все k-критические графы для значений параметра k, равных $k = 1$, $k = 2$ и $k = 3$.

19. (1 балл). Пусть G есть k-критический граф. Доказать следующие утверждения.

    (a) Для произвольной вершины $x \in V(G)$ существует правильная раскраска G в k цветов, в которой вершина x окрашена в цвет, не встречающийся при окраске других вершин, а все остальные цвета встречаются при окраске подмножества $N(x)$ ее соседей.

    (b) Для произвольного ребра $e \in E(G)$ в любой правильной окраске графа $G - e$ в $k - 1$ цвет концевые вершины e оказываются окрашенными в один и тот же цвет.