Теорема Форда-Фалкерсона

Домашнее задание №8

27 октября 2017 г.

Обязательная часть

1. (0.5 балла). Найти количество совершенных паросочетаний в колесе W_n.

2. (1 балл). Определить числа $\alpha(G)$, $\alpha'(G)$, $\beta(G)$ и $\beta'(G)$ для графа $G = K_n$.

3. (1 балл). Подсчитать количество совершенных паросочетаний в полном двудольном графе $K_{n,n}$. Как изменится ответ для графа $K_{n,n}$, в котором удалили ребра, входящие в одно из совершенных паросочетаний?

4. (1.5 балла). Пусть M и N есть два паросочетания в графе G, такие, что $|N| > |M|$. Доказать, что существуют паросочетания M' и N', такие, что $|M'| = |M| + 1$, $|N'| = |N| - 1$, $M' \cup N' = M \cup N$ и $M' \cap N' = M \cap N$.

5. (1.5 балла). Определить минимальный размер наибольшего по включению паросочетания в простом цикле C_{11}, построенном на одиннадцати вершинах. Чему будет равен этот размер в случае произвольного простого цикла C_n?

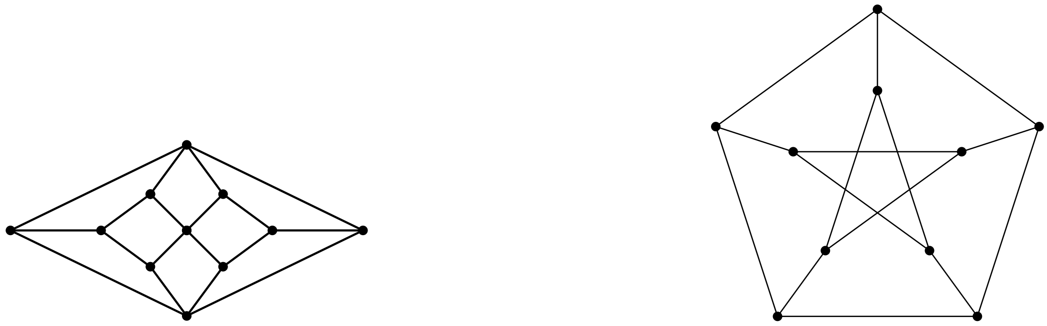
6. (1 балл). Пусть S есть подмножество множества $V(G)$ вершин графа G, покрытое некоторым паросочетанием M. Доказать, что некоторое максимальное паросочетание также покрывает все вершины этого множества. Верно ли, что данный факт будет выполняться для любого максимального паросочетания?

7. (1.5 балла). Рассмотрим следующую игру на графе G: два игрока поочередно выбирают вершины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ графа так, чтобы вершина x_{i+1} была бы смежной с вершиной x_i; тот из игроков, кто не сможет выбрать новую вершину по этим правилам, проигрывает. Доказать, что первый игрок имеет выигрышную стратегию тогда и только тогда, когда в G отсутствует совершенное паросочетание.

8. (1 балл). Определить числа $\alpha(G)$, $\alpha'(G)$, $\beta(G)$ и $\beta'(G)$ для графа Хершеля (рис. 1,a).

9. (1.5 балла). Определить числа $\alpha(G)$, $\alpha'(G)$, $\beta(G)$ и $\beta'(G)$ для графа Петерсена (рис.1,b).

10. (1.5 балла). Доказать, что для любого простого нетривиального графа G справедливо неравенство
$$\alpha(G) \leqslant n - m/\Delta(G),$$
где n — количество вершин, а m — количество ребер в графе G. Показать, что в случае регулярного графа отсюда следует, что $\alpha(G) \leqslant n/2$.



(a) (b)

Рис. 1

11. (1.5 балла). Доказать, что граф G является двудольным тогда и только тогда, когда любой подграф $H \leqslant G$ имеет вершинно независимое множество S, размер $|S|$ которого больше или равен $|V(H)|/2$.

Дополнительная часть

1. (2 балла). Доказать вершинную теорему Менгера для ориентированных графов с помощью теоремы Форда-Фалкерсона.

2. (2 балла). Доказать вершинную теорему Менгера для неориентированных графов с помощью теоремы Форда-Фалкерсона.

3. (2.5 балла). Доказать, что для любого графа G справедливо неравенство

$$\alpha(G) \geqslant \sum_{x \in V(G)} \frac{1}{\deg(x)+1}.$$

4. (2.5 балла). Доказать, что для любого простого графа G с $|V(G)| = n \geqslant 2\delta(G)$, где $\delta(G)$ — минимальная степень вершины в G, справедливо неравенство

$$\alpha'(G) \geqslant \delta(G).$$