

Задание 8

14.04.2017

FL 23 Докажите, что следующие языки являются контекстно-свободными:

f) $\{x\#y \mid x, y \in \{0, 1\}^*, x \neq y\}$

FL 24 Докажите, что класс контекстно-свободных языков замкнут относительно операций:

- a) Объединения с контекстно-свободными и пересечения с регулярными языками.
- b) $SUFFIX(L) = \{v \mid \exists u : uv \in L\}$.
- c) $h(L)$, где $h : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ — произвольный гомоморфизм.
- d) $SHIFT(L)$.

FL 25 Докажите, что если L_1 и L_2 — регулярные языки, то $L_3 = \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2, |u| = |v|\}$ контекстно-свободный.

FL 26 Построить однозначную грамматику для языка

$$\{c^m a^{\ell_1} b a^{\ell_2} b \dots a^{\ell_t} b d^n \mid m, n, \ell_i, t \geq 0, t \geq m, \ell_m = n\}$$

FL 27 Докажите, что замыкание Клини унарного языка является регулярным языком.

FL 28 Пусть $G = (\Sigma, N, R, S)$ — обыкновенная грамматика, в которой $|R| = p$ и длина правой части каждого правила не превосходит m . Пусть из $A \in N$ выводится пустая строка. Докажите, что тогда из A возможно вывести пустую строку за не более чем $\frac{m^p - 1}{m - 1}$ шагов.

Лемма. (*The pumping lemma for CF-grammars*)

Для каждого контекстно-свободного языка $L \subseteq \Sigma^*$ существует такая константа $p \geq 1$, что для любой строки $w \in L$, для которой $|w| \geq p$, существует разложение $w = xiyvz$, где $|xy| > 0$ и $|iyv| \leq p$, для которого $xi^i y v^i z \in L$ при всех $i \geq 0$.

FL 29 Докажите усиление леммы о накачке, утверждающее существование подобного разбиения с $|u| > 0, |v| > 0$.

FL 30 Докажите, что следующие языки не являются контекстно-свободными:

- a) $\{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0, m \neq n\}$
- c) $\{a^{k_1} b a^{k_2} b \dots a^{k_n} b \mid n \geq 1, 0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_n\}$
- d) $\{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, |w|_a \cdot |w|_b < |w|_c\}$
- e) $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}, n \mid m\}$

FL 31 Докажите, что класс контекстно-свободных языков не замкнут относительно операции

- a) пересечения
- b) дополнения

FL 32 Докажите следующую Лемму Огдена:

Лемма. Для каждого контекстно-свободного языка $L \subseteq \Sigma^*$ существует такая константа $p \geq 1$, что для любой строки $w \in L$, для которой $|w| \geq p$, и для любого множества $P \subseteq \{1, \dots, |w|\}, |P| \geq p$ выделенных позиций в w существует разложение $w = xiyvz$, для которого

- iv содержит хотя бы одну выделенную позицию,
- iyv содержит не более p выделенных позиций,
- $xi^i y v^i z \in L$ при всех $i \geq 0$.

FL 33 Пусть обыкновенная грамматика G в нормальной форме Хомского имеет k нетерминальных символов. Докажите, что если G генерирует некоторую строку w длины более 2^k , то G генерирует бесконечный язык.