

Домашнее задание на 20.04

Задач на зачет: 4.

1. Докажите комбинаторно, что количество беспорядков D_n удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$$

2. Определить количество способов размещения n различных для нас гостей по трем различным же столам при условии, что за первым столом должен сидеть хотя бы один гость, за вторым столом должно сидеть только нечетное, а за третьим — четное число гостей.
3. Мы знаем, что при фиксированном параметре n производящая функция для чисел $\binom{n}{k}$ равна $(1+z)^n$. Чему равна обыкновенная производящая функция для этих чисел $\binom{n}{k}$ в случае, если мы вместо n зафиксируем параметр k ? Можно ли записать для этих чисел экспоненциальную производящую функцию при фиксированном параметре k ?
4. Описанную на паре задачу про сумму очков при нескольких бросаниях кубика можно обобщить следующим образом. Имеется мешок, в котором имеется m жетонов, занумерованных числами от 0 до $m-1$. Из мешка вытаскивают очередной жетон, записывают его номер, а затем возвращают жетон обратно в мешок. В результате получается последовательность из k чисел. Требуется узнать, сколько из получающихся таким образом различных числовых последовательностей имеют сумму, равную n . Указанное количество обозначим через $\binom{k,m}{n}$. Доказать, что эти числа рассчитываются по формуле

$$\binom{k,m}{n} = \sum_{i: im \leq n} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{k+n-im-1}{k-1}. \quad (1)$$

5. Автобусный билет с шестизначным номером считается счастливым в случае, если сумма первых трех его цифр совпадает с суммой последних трех цифр. Подсчитать количество счастливых билетов.
6. Для производящей функции путей Дика есть соотношение $f(z) = 1 + zf^2(z)$. Записать аналогичное равенство для производящей функции, описывающей количество путей Моцкина, и дать его комбинаторную интерпретацию с использованием комбинаторного смысла сложения и умножения обыкновенных производящих функций.
7. Рассмотрим окружность, на которой равномерно расставлено n точек. Часть из этих точек соединены между собой хордами так, чтобы ни одна пара хорд не пересекалась между собой. Выписать производящую функцию $f(z)$, описывающую количество способов провести непересекающиеся хорды между n точками на окружности.