

Листочек 21.09.2017

1. Доказать, что количество способов раскладки n различных предметов по k неразличимым ящикам при условии, что в каждом ящике находится не более одного предмета, равно 0 в случае $n > k$ и 1 в случае $n \leq k$.
2. Сколько разных слов можно получить, переставляя буквы слов а) “математика”; б) “комбинаторика”?
3. Обозначим через $F(n)$ количество разбиений n -множества без блоков единичной длины. Доказать комбинаторно, что

$$B(n) = F(n) + F(n + 1).$$

4. Получить явные аналитические выражения для чисел Стирлинга $S(n, 1)$, $S(n, n)$, $S(n, 2)$ и $S(n, n - 1)$.
5. Доказать, что для всех $n > 2$ числа Белла $B(n) < n!$.
6. Решить следующие линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка: Построить общее решение рекуррентного соотношения вида

$$a_{n+5} = 2a_{n+4} + 16a_{n+1} - 32a_n.$$

7. Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 6 \cdot 3^n.$$

8. На плоскости нарисованы n окружностей так, что любая пара окружностей пересекается ровно по двум точкам, и никакие три окружности не имеют общей точки пересечения. Определить количество a_n областей, на которые разбивается плоскость такими окружностями.
9. Рассмотрим плоскость (x, y) . Предположим, что мы можем ходить по плоскости, делая шаг вверх (U), шаг вправо (R) и шаг влево (L) на единицу длины так, чтобы шаг R никогда не следовал за шагом L и наоборот. Подсчитать количество a_n таких путей после n шагов.