21 марта 2018. Вычеты и интегралы по контуру.

Классификация изолированных особых точек. Пусть функция $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности точки $a \neq \infty$, т. е. в кольце $0 < |z-a| < \rho$, но не регулярна в точке a. Тогда точка a называется изолированной особой точкой функции $f(z)$. Аналогично, бесконечно удаленная точка называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если эта функция регулярна в некоторой области $\rho < |z| < \infty$. В зависимости от поведения функции $f(z)$ вблизи особой точки различают три типа особых точек. Изолированная конечная или бесконечно удаленная особая точка функции $f(z)$ называется

1) *устранимой* особой точкой, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)$;

2) *полюсом*, если существует бесконечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$;

3) *существенно особой* точкой, если не существует (ни конечного, ни бесконечного) предела функции $f(z)$ в точке a.

Ряд Лорана в окрестности особой точки. Если функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 < |z-a| < \rho$, то ее можно представить в виде сходящегося в этом кольце ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, который называют рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a.

Вычеты. Вычетом функции f в изолированной особой точке $a \in \mathbb{C}$ называется число $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=R} f(z)\,dz$ (обход контура в положительном направлении — против часовой стрелки). Пусть функция f регулярна в области $|z| > \rho$ (точка $z=\infty$ является либо изолированной особой точкой, либо точкой регулярности функции f). Вычетом функции f в бесконечности называется число $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} f(z)\,dz, R > \rho > 0$ (обход контура по часовой стрелке — область $|z| > R$ остается слева).

Если $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ — ряд Лорана функции $f(z)$, регулярной в проколотой окрестности точки a, то есть в кольце $0 < |z-a| < \rho$, то $res_{z=a} f(z) = c_{-1}$.

Если $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ — ряд Лорана функции $f(z)$, регулярной в окрестности ∞ (то есть в области $|z| > \rho$), то $res_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$.

Формулы для вычисления вычетов.

1) Полюс первого порядка. $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z) = \lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$.

Пусть $f(z) = \frac{h(z)}{\varphi(z)}$, где $h(z)$ и $\varphi(z)$ — функции, регулярные в точке a, причем $\varphi(a) = 0$, $\varphi'(a) \neq 0$. Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{h(a)}{\varphi'(a)}.$$

2) Полюс порядка $m > 1$. $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z\to a} [(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}$.

3) Бесконечность. Если f регулярна в ∞, то $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z))$. Если ∞ ноль порядка k, то $f(z) \sim \frac{A}{z^k}$. Тогда при $k=1$ $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -A$, при

$k \geqslant 2 \ \underset{z=\infty}{res}\, f(z) = 0.$

Теорема о вычетах. Если функция f регулярна, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, \ldots, z_n$, то сумма всех вычетов функции f, включая и вычет в бесконечности, равна нулю.

Теорема Коши о вычетах. Пусть D — область с кусочно-гладкой границей Γ, а функция f регулярна в области D за исключением конечного числа изолированных особых точек a_k (к их числу относится и точка ∞, если она лежит в D), кроме того, функция f непрерывна вплоть до границы области D. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res}\, f(z),$$

здесь Γ — положительно ориентированна относительно области D.

Вычислите интегралы:

1. $\oint_{|z|=4} \frac{z^4}{e^z+1} dz$;
2. $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2(1-\cos z)}$;
3. $\oint_{|z+i|=2} \frac{z^2}{z^2-9} \sin \frac{1}{z} dz$;
4. $\oint_{|z|=7} \frac{1-\cosh z}{z^3+4\pi^2 z} dz$;
5. $\oint_{|z|=4} \frac{z^4}{1-z^8} dz$;
6. $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{e^{\frac{2}{z}}-e^{\frac{1}{z}}}$;
7. $\oint_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\sin\varphi}$, $a > 1$.