Типы в языках программирования
Лекция 7. Полиморфные типы: система $\lambda 2$ (System F)

Денис Николаевич Москвин

СПбАУ РАН

12.04.2018

План лекции

План лекции

1. Прагматика полиморфизма
2. Система $\lambda 2$ в стиле Карри
3. Система $\lambda 2$ в стиле Чёрча
4. Свойства систем $\lambda 2$

Недостатки $\lambda\!\to$

- В $\lambda\!\to$ по Чёрчу «повторное использование» затруднено:

$$\begin{aligned}&\lambda x^{\alpha}.\,x : \alpha \to \alpha\\ &\lambda x^{\beta}.\,x : \beta \to \beta\\ &\lambda x^{\gamma\to\delta}.\,x : (\gamma \to \delta) \to \gamma \to \delta\end{aligned}$$

  — три разные функции.

- Даже в версии Карри, типизируя терм

$$(\lambda y.\,y)(\lambda x.\,x)$$

  имеем $x{:}\sigma$, $y{:}\sigma \to \sigma$, $\lambda x.\,x : \sigma \to \sigma$, $\lambda y.\,y : (\sigma \to \sigma) \to \sigma \to \sigma$.

- Делая одну экспансию, получим нетипизируемое

$$(\lambda f.\,f\,f)(\lambda x.\,x)$$

Полиморфизм

- Идея: переместить операцию подстановки из метатеории в теорию. Для этого
  1. вводят специальную П-абстракцию (не λ) по типу:
  $$(\lambda x.\, x) \quad : \quad \forall \alpha.\, \alpha \to \alpha$$
  2. разрешают подстановку любого типа вместо типовой переменной связанной квантором всеобщности:
  $$\begin{array}{rcl} [\alpha := \gamma](\alpha \to \alpha) & \Rightarrow & (\lambda x.\, x) : \gamma \to \gamma \\ [\alpha := \gamma \to \gamma](\alpha \to \alpha) & \Rightarrow & (\lambda x.\, x) : (\gamma \to \gamma) \to \gamma \to \gamma \\ [\alpha := \gamma \to \delta \to \gamma](\alpha \to \alpha) & \Rightarrow & (\lambda x.\, x) : (\gamma \to \delta \to \gamma) \to \gamma \to \delta \to \gamma \end{array}$$
- Получим $\lambda 2$ — ***лямбда-исчисление второго порядка***.
  System F (Жан-Ив Жирар, 1972)
  Полиморфное λ***-исчисление*** (Джон Рейнольдс, 1974)

План лекции

1. Прагматика полиморфизма
2. Система $\lambda 2$ в стиле Карри
3. Система $\lambda 2$ в стиле Чёрча
4. Свойства систем $\lambda 2$

- $\mathbb{V} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ — множество типовых переменных.
- ***Сильный полиморфизм*** (System F), полиморфизм первого класса (first-class polymorphism)

$$\mathbb{T} \;::=\; \mathbb{V} \mid \mathbb{T} \to \mathbb{T} \mid \forall \mathbb{V}.\, \mathbb{T}$$

- ***Слабый полиморфизм*** (в стиле ML)

$$\mathbb{T}_{\to} \;::=\; \mathbb{V} \mid \mathbb{T}_{\to} \to \mathbb{T}_{\to}$$
$$\mathbb{T}_{w} \;::=\; \forall \mathbb{V}.\, \mathbb{T}_{w} \mid \mathbb{T}_{\to}$$

Квантор $\forall$ можно ставить только на верхнем уровне:

$$\forall \alpha_1.\, \forall \alpha_2.\, \cdots \forall \alpha_n.\, \sigma \;\equiv\; \forall \alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\, \alpha_n.\, \sigma$$

где σ тип из $\lambda{\to}$ (***монотип***). Но нельзя так $\forall \alpha.\, \alpha \to (\forall \beta.\, \alpha \to \beta) \to \alpha$.

Контексты для $\lambda 2$

- Типовые переменные теперь тоже делятся на связанные (квантором $\forall$) и свободные.
- Свободные должны быть описаны в контексте.
- Нотация ***объявления*** типовой переменной: $\alpha : *$ (что эквивалентно $\alpha \in \mathbb{V}$).
- ***Контекст*** теперь — *упорядоченное* множество объявлений

$$\Gamma = \langle \alpha : *, x : \alpha \to \alpha \rangle \quad (\text{но не наоборот!})$$

$$\begin{aligned}
\alpha:*, \beta:*, f:\alpha\to\beta &\vdash f : \alpha \to \beta \\
\alpha:*, \beta:*, f:\alpha\to\beta, x:\alpha &\vdash f\,x : \beta \\
\alpha:*, \beta:*, x:\alpha &\vdash \lambda f.\, f\,x : (\alpha\to\beta)\to\beta \\
\alpha:*, x:\alpha &\vdash \lambda f.\, f\,x : \forall\beta.\,(\alpha\to\beta)\to\beta
\end{aligned}$$

Для последнего утверждения требуется правило.

Правило введения $\forall$ в $\lambda 2$ в стиле Карри (к синтаксису с П-нотацией мы перейдем в более богатых системах)

$$\boxed{\frac{\Gamma, \alpha{:}* \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.\, \sigma}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{\Gamma, \alpha{:}* \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash M : \Pi \alpha{:}*.\, \sigma}}$$

Переменная α на последнем месте в контексте; её нет в Γ.

$$\alpha{:}*, \beta{:}*, x{:}\alpha \;\vdash\; \lambda f.\, f\, x : (\alpha \to \beta) \to \beta$$

$$\alpha{:}*, x{:}\alpha, \beta{:}* \;\vdash\; \lambda f.\, f\, x : (\alpha \to \beta) \to \beta$$

По β абстрагировать можно. По α — нельзя!

$$\alpha{:}*, x{:}\alpha \;\vdash\; \lambda f.\, f\, x : \forall \beta.\, (\alpha \to \beta) \to \beta$$

Расширим понятие выводимости из контекста на типы.

Тип ***выводи́м из контекста***, нотация

$$\Gamma \Vdash \sigma : *$$

если все свободные переменные σ принадлежат Γ.

$$\begin{array}{rcl} \alpha{:}*, \beta{:}* & \Vdash & (\alpha \to \beta) \to \beta : * \\ \alpha{:}* & \Vdash & \forall \beta.\, (\alpha \to \beta) \to \beta : * \\ & \Vdash & \forall \alpha\, \beta.\, (\alpha \to \beta) \to \beta : * \\ \\ \beta{:}* & \Vdash & (\forall \alpha.\, \alpha \to \beta) \to \beta : * \end{array}$$

Последнее верно только для $\lambda 2(\mathbb{T})$, но не для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$.

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.\, \sigma \qquad \Gamma \Vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M : [\alpha := \tau]\sigma}$$

$\tau \in \mathbb{T}_{\rightarrow}$ для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ и $\tau \in \mathbb{T}$ для $\lambda 2(\mathbb{T})$.

$$\begin{array}{lcl}
\beta : *, \gamma : * & \vdash & \lambda x\, y.\, x : \forall \alpha.\, \alpha \to \beta \to \alpha \\
\beta : *, \gamma : * & \vdash & \lambda x\, y.\, x : (\beta \to \gamma) \to \beta \to \beta \to \gamma \\
 & & \\
\beta : *, \gamma : * & \vdash & \lambda x\, y.\, x : (\forall \delta.\, \delta \to \gamma) \to \beta \to (\forall \delta.\, \delta \to \gamma)
\end{array}$$

Последнее верно только для $\lambda 2(\mathbb{T})$, но не для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$.

Формальности $\lambda 2$: образование типов

(начальное)	$\dfrac{\alpha{:}* \in \Gamma}{\Gamma \Vdash \alpha : *}$
(образование $\to$)	$\dfrac{\Gamma \Vdash \sigma : * \quad \Gamma \Vdash \tau : *}{\Gamma \Vdash \sigma \to \tau : *}$
(образование $\forall$)	$\dfrac{\Gamma, \alpha{:}* \Vdash \sigma : *}{\Gamma \Vdash \forall \alpha .\, \sigma : *}$

- Эти правила описывают $\lambda 2(\mathbb{T})$.
- Для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ напишите их самостоятельно (совет: введите $*_w$ и $*_\to$).

Формальности $\lambda 2$: конструирование контекстов

Контекст называют ***допустимым***, обозначение

$$\Gamma \vdash$$

если он построен по следующим правилам:

(начальное)	$\langle\,\rangle \vdash$	
(расширение типом)	$\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma, \alpha{:}{*} \vdash}$	$\alpha \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$
(расширение термом)	$\dfrac{\Gamma \Vdash \sigma : *}{\Gamma, x{:}\sigma \vdash}$	$x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$

При реализации мы снимем требование свежести имен переменных!

(начальное)	$\dfrac{x:\sigma \in \Gamma \quad \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash x:\sigma}$	
(удаление $\to$)	$\dfrac{\Gamma \vdash M:\sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N:\sigma}{\Gamma \vdash M\,N:\tau}$	
(введение $\to$)	$\dfrac{\Gamma, x:\sigma \vdash M:\tau \quad \Gamma \Vdash \sigma:*}{\Gamma \vdash \lambda x.\,M:\sigma \to \tau}$	$\sigma \in \mathbb{T}_{\to}$ для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ $\sigma \in \mathbb{T}$ для $\lambda 2(\mathbb{T})$
(удаление $\forall$)	$\dfrac{\Gamma \vdash M:\forall\alpha.\,\sigma \quad \Gamma \Vdash \tau:*}{\Gamma \vdash M:[\alpha := \tau]\sigma}$	$\tau \in \mathbb{T}_{\to}$ для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ $\tau \in \mathbb{T}$ для $\lambda 2(\mathbb{T})$
(введение $\forall$)	$\dfrac{\Gamma, \alpha:* \vdash M:\sigma}{\Gamma \vdash M:\forall\alpha.\,\sigma}$	

Для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ подстановка типа и абстракция монотипны.

Типизируем самоприменение f f

Пусть $\Gamma \equiv f{:}\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha,\ \beta{:}*$ (он допустим — д.з.), тогда

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash f{:}\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha \quad \Gamma\Vdash\beta\to\beta:*}{\Gamma\vdash f{:}(\beta\to\beta)\to\beta\to\beta}(\text{у}\forall) \quad \dfrac{\Gamma\vdash f{:}\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha \quad \Gamma\Vdash\beta:*}{\Gamma\vdash f:\beta\to\beta}(\text{у}\forall)}{\dfrac{f{:}\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha,\ \beta{:}*\vdash f\,f:\beta\to\beta}{\dfrac{f{:}\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha\vdash f\,f:\forall\beta.\,\beta\to\beta}{\vdash\lambda f.\,f\,f:(\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha)\to(\forall\beta.\,\beta\to\beta)}(\text{вв}\to)}(\text{вв}\forall)}(\text{у}\to)$$

- Последнее верно только для $\lambda2(\mathbb{T})$, но не для $\lambda2(\mathbb{T}_w)$.
- Распространено обозначение $\top\equiv\forall\alpha.\,\alpha\to\alpha$, тогда
  - в $\lambda2(\mathbb{T}_w)$ имеем $f{:}\top\vdash f\,f:\top$;
  - в $\lambda2(\mathbb{T})$ имеем $\vdash\lambda f.\,f\,f:\top\to\top$.

Пусть $\Gamma \equiv \mathrm{f}{:}\forall\alpha.\,\alpha,\, \beta{:}*$ (он допустим — д.з.), тогда

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \mathrm{f}{:}\forall\alpha.\,\alpha \qquad \Gamma \Vdash \beta\to\beta : *}{\Gamma \vdash \mathrm{f} : \beta\to\beta}(\text{уд}\forall) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \mathrm{f}{:}\forall\alpha.\,\alpha \qquad \Gamma \Vdash \beta : *}{\Gamma \vdash \mathrm{f} : \beta}(\text{уд}\forall)}{\mathrm{f}{:}\forall\alpha.\,\alpha,\, \beta{:}* \vdash \mathrm{f}\,\mathrm{f} : \beta}(\text{уд}\to)}{\mathrm{f}{:}\forall\alpha.\,\alpha \vdash \mathrm{f}\,\mathrm{f} : \forall\beta.\,\beta}(\text{вв}\forall)}{\vdash \lambda \mathrm{f}.\,\mathrm{f}\,\mathrm{f} : (\forall\alpha.\,\alpha)\to(\forall\beta.\,\beta)}(\text{вв}\to)$$

- Последнее опять только для $\lambda 2(\mathbb{T})$, но не для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$.
- Распространено обозначение $\bot \equiv \forall\alpha.\,\alpha$, тогда
  - в $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ имеем $\mathrm{f}{:}\bot \vdash \mathrm{f}\,\mathrm{f} : \bot$;
  - в $\lambda 2(\mathbb{T})$ имеем $\vdash \lambda \mathrm{f}.\,\mathrm{f}\,\mathrm{f} : \bot\to\bot$.

Проблемы разрешимости для $\lambda 2$ по Карри

- Проблемы разрешимости:
  - Задача проверки типа (ЗПТ) $\vdash M : \sigma ?$;
  - Задача синтеза типа (ЗСТ) $\vdash M : ?$;
  - Задача обитаемости типа (ЗОТ) $\vdash ? : \sigma$.
- Для $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$
  - ЗПТ и ЗСТ эквивалентны и разрешимы: алгоритм PT легко расширяется на *схемы типов*.
  - ЗОТ тоже разрешима.
- Для сильной системы $\lambda 2(\mathbb{T})$
  - ЗПТ и ЗСТ эквивалентны и неразрешимы. (Joe Wells, 1993)
  - ЗОТ тоже неразрешима.
- Практический вопрос: насколько можно расширить слабую систему, чтобы сохранить возможность синтеза типа?

- Можно расширить $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$ правилом:

$$\text{(правило }\mathtt{let}\text{)}\quad \frac{\Gamma \vdash M:\sigma \quad \Gamma, x:\sigma \vdash N:\tau}{\Gamma \vdash (\mathtt{let}\ x = M\ \mathtt{in}\ N):\tau} \quad \begin{array}{l}\tau \in \mathbb{T}_{\to}\\ \sigma \in \mathbb{T}_w\end{array}$$

- Фактически это способ делать полиморфные по σ редексы:

$$(\lambda x.\, N)\, M$$

- Но «голые» полиморфные по σ абстракции $(\lambda x.\, N):\sigma\to\tau$ по-прежнему недопустимы!
- Теперь можно типизировать $\mathtt{let}\ f = \lambda x.\, x\ \mathtt{in}\ f\, f$. (д.з.)
- ЗСТ по-прежнему разрешима: алгоритм РТ требует лишь небольшой модификации.

Определим множество типов $\mathbb{T}_k$ ранга k индуктивно:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{T}_0 & ::= & \mathbb{V} \mid \mathbb{T}_0 \to \mathbb{T}_0 \ (\equiv \ \mathbb{T}_\to) \\
\mathbb{T}_{k+1} & ::= & \mathbb{T}_k \mid \mathbb{T}_k \to \mathbb{T}_{k+1} \mid \forall \mathbb{V}.\, \mathbb{T}_{k+1}
\end{array}
$$

Типы первого, второго и третьего ранга

$$\forall \alpha.\, \alpha \to \alpha$$

$$\forall \alpha.\, \alpha \to (\forall \beta.\, \alpha \to \beta)$$

$$(\forall \alpha.\, \alpha \to \alpha) \to (\forall \beta.\, \beta)$$

$$((\forall \alpha.\, \alpha \to \alpha) \to \beta) \to \gamma$$

Разрешимость для $\lambda 2(\mathbb{T}_k)$ в стиле Карри

- Система $\lambda 2(\mathbb{T}_1)$ это фактически $\lambda 2(\mathbb{T}_w)$; ЗСТ для неё разрешима.
- Для системы $\lambda 2(\mathbb{T}_2)$ ЗСТ разрешима, алгоритм описан в 1999 году (Kfoury and Wells, 1999).
- Для систем более высокого ранга ЗСТ неразрешима.
- Однако при наличии некоторых «подсказок» (указаний типов в определенных видах термов) синтез типа оказывается возможным.
- В Хаскелле (GHC) для работы с системами произвольного ранга используем ключи `-XRankNTypes` и `-XExplicitForAll`.

- В системах Чёрча терм содержит информацию о типах.

$$\begin{array}{rcl} \alpha{:}*, \beta{:}*, x{:}\alpha, y{:}\beta & \vdash & x : \alpha \\ \alpha{:}*, \beta{:}*, x{:}\alpha & \vdash & (\lambda y{:}\beta.\, x) : \beta \to \alpha \\ \alpha{:}*, \beta{:}* & \vdash & (\lambda x{:}\alpha.\, \lambda y{:}\beta.\, x) : \alpha \to \beta \to \alpha \end{array}$$

- Хотим универсально абстрагироваться по β. Как это отразить в терме?

$$\begin{array}{rcl} \alpha{:}* & \vdash & (\lambda \beta{:}*.\, \lambda x{:}\alpha.\, \lambda y{:}\beta.\, x) : \forall \beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \\ & \vdash & (\lambda \alpha{:}*.\, \lambda \beta{:}*.\, \lambda x{:}\alpha.\, \lambda y{:}\beta.\, x) : \forall \alpha.\, \forall \beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \end{array}$$

  В отличие от системы $\lambda\underline{\omega}$, здесь мы абстрагируем по типу именно терм, наделяя его полиморфным поведением.
- Часто вместо $\lambda\alpha{:}*$ пишут $\Lambda\alpha{:}*$ или просто $\Lambda\alpha$.

$$\begin{array}{rcl} \alpha{:}* & \vdash & (\Lambda \beta.\, \lambda x^{\alpha} y^{\beta}.\, x) : \forall \beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \\ & \vdash & (\Lambda \alpha\, \beta.\, \lambda x^{\alpha} y^{\beta}.\, x) : \forall \alpha\, \beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \end{array}$$

- Правило введения $\forall$ в $\lambda 2$ в стиле Чёрча

$$\boxed{\frac{\Gamma, \alpha{:}* \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.\, M : \forall\alpha.\,\sigma}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{\Gamma, \alpha{:}* \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda\alpha{:}*.\, M : \forall\alpha.\,\sigma}}$$

- Красным выделено отличие от $\lambda 2$ в стиле Карри.
- На прошлом слайде мы показали, что в $\lambda 2$ в стиле Чёрча

$$\mathbf{K} \equiv \Lambda\alpha\,\beta.\,\lambda x^{\alpha}\,y^{\beta}.\,x, \qquad \mathbf{K} : \forall\alpha\,\beta.\,\alpha \to \beta \to \alpha$$

- Аналогично для $\mathbf{I}$

$$\begin{aligned} \alpha{:}* \quad &\vdash \quad \lambda x^{\alpha}.\,x : \alpha \to \alpha \\ &\vdash \quad \Lambda\alpha.\,\lambda x^{\alpha}.\,x : \forall\alpha.\,\alpha \to \alpha \end{aligned}$$

$$\mathbf{I} \equiv \Lambda\alpha.\,\lambda x^{\alpha}.\,x, \quad \vdash \mathbf{I} : \forall\alpha.\,\alpha \to \alpha$$

λ2 в стиле Чёрча: применение терма к типу

- Удаление $\forall$ тоже должно отражаться на терме.

$$\gamma{:}* \;\vdash\; (\Lambda\alpha.\,\Lambda\beta.\,\lambda x^{\alpha}.\,\lambda y^{\beta}.\,x) : \forall\alpha.\,\forall\beta.\,\alpha\to\beta\to\alpha$$

$$\gamma{:}* \;\vdash\; (\Lambda\alpha.\,\Lambda\beta.\,\lambda x^{\alpha}.\,\lambda y^{\beta}.\,x)\,\gamma : [\alpha := \gamma]\forall\beta.\,\alpha\to\beta\to\alpha$$

  На уровне типов это делается через подстановку типа, а на уровне термов — через ***универсальное применение***.

- Универсальное применение порождает новый способ редукции $(\Lambda\alpha.\,M)\,\sigma \to_{\beta} M[\alpha := \sigma]$

$$\gamma{:}* \;\vdash\; (\Lambda\beta.\,\lambda x^{[\alpha:=\gamma]\alpha}.\,\lambda y^{\beta}.\,x) : \forall\beta.\,\gamma\to\beta\to\gamma$$

$$\gamma{:}*, \delta{:}* \;\vdash\; (\Lambda\beta.\,\lambda x^{\gamma}.\,\lambda y^{\beta}.\,x)\,(\delta\to\delta) : [\beta := \delta\to\delta]\gamma\to\beta\to\gamma$$

$$\gamma{:}*, \delta{:}* \;\vdash\; (\lambda x^{\gamma}.\,\lambda y^{\delta\to\delta}.\,x) : \gamma\to(\delta\to\delta)\to\gamma$$

- Правило удаления $\forall$ в $\lambda 2$ в стиле Чёрча

$$\boxed{\dfrac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.\, \sigma \qquad \Gamma \Vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M\, \textcolor{red}{\tau} : \sigma[\alpha := \tau]}}$$

- Красным выделено отличие от $\lambda 2$ в стиле Карри.
- На прошлом слайде мы показали, что в $\lambda 2$ в стиле Чёрча

$$\begin{array}{rcl} & \vdash & \mathbf{K} : \forall \alpha\, \beta.\, \alpha \to \beta \to \alpha \\ \gamma{:}*, \delta{:}* & \vdash & \mathbf{K}\, \gamma\, (\delta \to \delta) : \gamma \to (\delta \to \delta) \to \gamma \end{array}$$

- Аналогично для $\mathbf{I} \equiv \Lambda \alpha.\, \lambda x^{\alpha}.\, x$ имели $\vdash \mathbf{I} : \forall \alpha.\, \alpha \to \alpha$ и

$$\gamma{:}* \;\vdash\; \mathbf{I}\, \gamma : \gamma \to \gamma$$

$$\mathbf{I}\, \gamma \equiv (\Lambda \alpha.\, \lambda x^{\alpha}.\, x)\, \gamma \;\to_{\beta}\; \lambda x^{\gamma}.\, x$$

Формальности $\lambda 2$ а ля Чёрч: предтермы и редукция

- Предтермы:

$$\Upsilon_{\mathbb{T}} = V \mid \Upsilon_{\mathbb{T}}\Upsilon_{\mathbb{T}} \mid \Upsilon_{\mathbb{T}}\mathbb{T} \mid \lambda V^{\mathbb{T}}.\,\Upsilon_{\mathbb{T}} \mid \Lambda\mathbb{V}.\,\Upsilon_{\mathbb{T}}$$

- Редукция:

$$\begin{array}{rcl} (\lambda x^{\sigma}.\,M)\,N & \to_{\beta} & M[x := N], \\ (\Lambda\alpha.\,M)\,\sigma & \to_{\beta} & M[\alpha := \sigma] \end{array}$$

Во втором виде редукций подстановка происходит в типы. «Базовая» структура терма не меняется.

Формальности $\lambda 2$ а ля Чёрч: правила типизации

(начальное)	$\dfrac{x:\sigma \in \Gamma \quad \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash x:\sigma}$
(удаление $\to$)	$\dfrac{\Gamma \vdash M:\sigma\to\tau \quad \Gamma \vdash N:\sigma}{\Gamma \vdash M\,N:\tau}$
(введение $\to$)	$\dfrac{\Gamma, x{:}\sigma \vdash M:\tau \quad \Gamma \Vdash \sigma:*}{\Gamma \vdash \lambda x^{\color{red}\sigma}.\,M:\sigma\to\tau}$
(удаление $\forall$)	$\dfrac{\Gamma \vdash M:\forall\alpha.\,\sigma \quad \Gamma \Vdash \tau:*}{\Gamma \vdash M\,{\color{red}\tau}:[\alpha:=\tau]\sigma}$
(введение $\forall$)	$\dfrac{\Gamma, \alpha:* \vdash M:\sigma}{\Gamma \vdash {\color{red}\Lambda\alpha.}\,M:\forall\alpha.\,\sigma}$

Красным выделено отличие от $\lambda 2$ в стиле Карри.

Типизируем самоприменение $f\,f$ в $\lambda 2$ а ля Чёрч

Напомним, что $\top \equiv \forall\alpha.\,\alpha\to\alpha$, тогда для $\Gamma \equiv f{:}\top, \beta{:}*$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash f{:}\top \qquad \Gamma \Vdash \beta\to\beta : *}{\Gamma \vdash f\,\color{red}{(\beta\to\beta)} : (\beta\to\beta)\to\beta\to\beta}\,(\text{уд}\forall) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash f{:}\top \qquad \Gamma \Vdash \beta : *}{\Gamma \vdash f\,\color{red}{\beta} : \beta\to\beta}\,(\text{уд}\forall)}{\dfrac{f{:}\top, \beta{:}* \vdash f\,\color{red}{(\beta\to\beta)}\,(f\,\color{red}{\beta}) : \beta\to\beta}{\dfrac{f{:}\top \vdash \color{red}{\Lambda\beta.}\,f\,(\beta\to\beta)\,(f\,\beta) : \forall\beta.\,\beta\to\beta}{\vdash \lambda f^{\top}.\,\Lambda\beta.\,f\,(\beta\to\beta)\,(f\,\beta) : \top\to\top}\,(\text{вв}{\to})}\,(\text{вв}\forall)}\,(\text{уд}{\to})$$

Красным выделено отличие от $\lambda 2$ в стиле Карри.

Импредикативность

Типизируем самоприменение совсем по-другому ($\top \equiv \forall\alpha.\,\alpha \to \alpha$):

$$
\dfrac{\dfrac{f{:}\top \vdash f{:}\top \qquad \Vdash \top{:}*}{f{:}\top \vdash f\,\top : \top \to \top}(\text{уд}\forall) \qquad f{:}\top \vdash f{:}\top}{\dfrac{f{:}\top \vdash f\,\top\,f : \top}{\vdash \lambda f^{\top}.\,f\,\top\,f \;:\; \top \to \top}(\text{вв}{\to})}(\text{уд}{\to})
$$

Красным выделено ***импредикативное*** применение:

$$
\begin{aligned}
f &: \forall\alpha.\,\alpha \to \alpha \\
f\,(\forall\alpha.\,\alpha \to \alpha) &: (\forall\alpha.\,\alpha \to \alpha) \to (\forall\alpha.\,\alpha \to \alpha)
\end{aligned}
$$

План лекции

Связь между системами λ2 Карри и Чёрча

- Можно задать стирающее отображение $|\cdot| : \Upsilon_{\mathbb{T}} \to \Lambda$:

$$
\begin{aligned}
|x| &\equiv x \\
|M\,N| &\equiv |M|\,|N| \\
|M\,\sigma| &\equiv |M| \\
|\lambda x^{\sigma}.\,M| &\equiv \lambda x.\,|M| \\
|\Lambda\alpha.\,M| &\equiv |M|
\end{aligned}
$$

- Все термы из версии Чёрча λ2 «проектируются» в термы в версии Карри:

$$M \in \Upsilon_{\mathbb{T}} \;\wedge\; \Gamma \vdash_{\text{Ч}} M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{\text{К}} |M| : \sigma$$

- Термы из версии Карри λ2 могут быть «подняты» в термы из версии Чёрча:

$$M \in \Lambda \;\wedge\; \Gamma \vdash_{\text{К}} M : \sigma \;\Rightarrow\; \exists N \in \Upsilon_{\mathbb{T}}\,[\Gamma \vdash_{\text{Ч}} N : \sigma \;\wedge\; |N| \equiv M]$$

- **ЗПТ** $\vdash M : \sigma?$ **и ЗСТ** $\vdash M : ?$.
  Для $\lambda 2$ а ля Чёрч — разрешимы, в отличие от сильной $\lambda 2$ а ля Карри.
- **ЗОТ** $\vdash ? : \sigma$.
  Неразрешима. (Соответствует *доказуемости* в $\mathrm{PROP2}$, для которой факт неразрешимости известен.)

Свойства $\lambda 2$

- Единственность типа (для $\lambda 2$ в стиле Чёрча):
  Пусть $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $\Gamma \vdash M : \tau$. Тогда $\sigma \equiv \tau$.
- Редукция субъекта
  Пусть $M \twoheadrightarrow_\beta N$. Тогда $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash N : \sigma$.
- Сильная нормализуемость
  Пусть $\Gamma \vdash M : \sigma$. Тогда любая последовательность β-редукций приводит к нормальной форме за конечное число шагов.