

Композиция обыкновенных производящих функций. Разбиение числа на произвольное число слагаемых. Диаграммная техника.
(ДЗ)

18 мая 2017 г.

1. Доказать, что один рубль можно разменять монетами в две и пять копеек большим количеством способов, чем монетами достоинством в три и пять копеек.
2. Сколько существует способов выбора 20 объектов из множества объектов пяти типов при условии, что количество объектов первого типа кратно пяти, второго — трем, объектов третьего типа следует выбирать не более четырех, четвертого — не менее трех, пятого — не более двух?
3. Доказать, что количество разбиений n на слагаемые, каждое из которых повторяется не более трёх раз, совпадает с количеством разбиений n , в которых повторяться могут только нечётные слагаемые.
4. Сколькими способами можно выбрать из урны 5 шаров красного, синего, белого и черного цветов при условии, что красные шары выбираются по одному за раз, синего — по четыре за раз, белого — по пять за раз и черного — по три за раз?
5. Дать комбинаторное доказательство теоремы про представления числа в виде суммы нечетных чисел.
6. На плацу стоят в одну линию n солдат. Дежурный офицер разбивает эту шеренгу на произвольное число k непустых отрядов, а

затем назначает в каждом отряде командира. Подсчитать с помощью производящих функций количество h_n способов совершить эту операцию.

7. С использованием диаграмм Ферре показать, что количество разбиений числа $2n + m$ на ровно $n + m$ слагаемых одинаково при любом $m \geq 0$. Сосчитать это количество разбиений.
8. С использованием диаграмм Ферре показать, что количество разбиений числа $n - m$ ровно на $(k - 1)$ частей, любая из которых меньше или равна m , равно количеству разбиений числа $n - k$ ровно на $(m - 1)$ частей, любая из которых меньше или равна k .
9. Доказать, что $p(1) + p(2) + \dots + p(n) < p(2n)$ при $n \geq 1$.