Гамильтоновы циклы

Практика

22 сентября 2017 г.

1. (0.25 балла). Верно ли, что если в простом графе G существует эйлеров цикл, то в нем существует и гамильтонов цикл? Верно ли обратное утверждение, а именно, верно ли, что если в простом графе существует гамильтонов цикл, то в нем существует и эйлеров цикл?

2. (1 балл). Подсчитать количество гамильтоновых циклов в полном двудольном графе $K_{n,n}$, $n > 1$.

3. (2 балла). Построить граф на пяти вершинах, имеющий в точности a) 1 цикл, b) 3 цикла, c) 6 циклов, d) 22 цикла, e) 13 циклов, f) 12 циклов.

4. (1 балл). Кубик сыра размерами $3 \times 3 \times 3$ разделен на 27 кубиков единичного объема. Мышь съедает по кубику в день, начиная с углового кубика. При этом на $(i+1)$-й день она съедает один из кубиков, смежных (то есть разделенных гранью) со съеденным кубиком сыра в i-й день. Может ли мышь съесть последним центральный кубик при таком способе поедания сыра?

5. (1.5 балла). Среди графов G_i, показанных на рис.1, указать графы, в которых гамильтоновы циклы существуют, а также графы, в которых таковые отсутствуют. Привести доказательство гамильтоновости или негамильтоновости соответствующих графов.

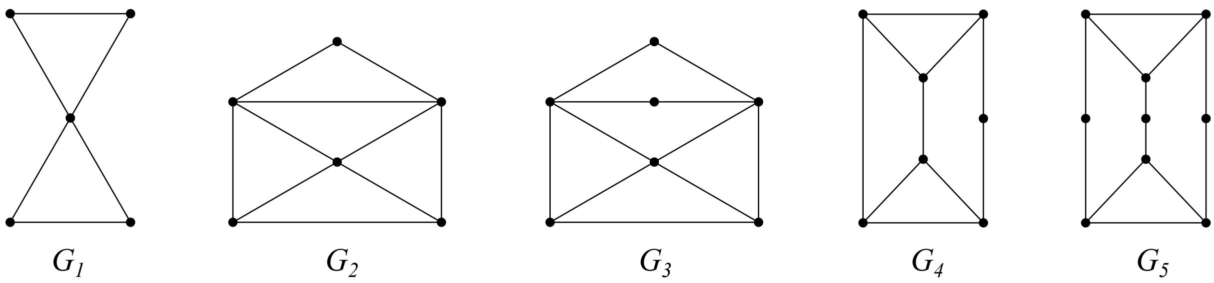
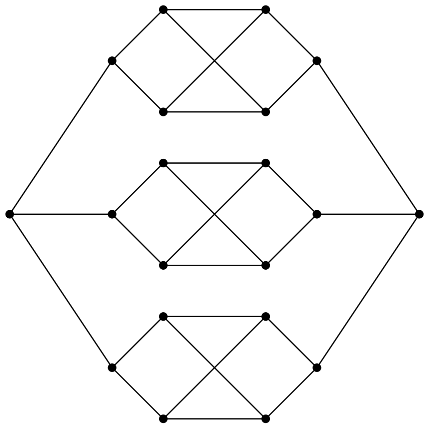


Рис. 1

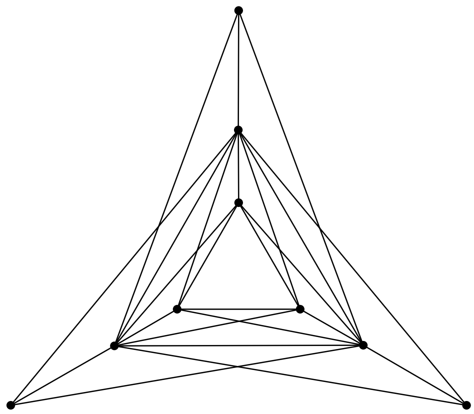
6. (1 балл). Используя необходимые условия (**??**) существования гамильтонова цикла в графе, докажите, что в графах, изображенных на рис.2, гамильтоновых циклов не существует.

7. (2 балла). Доказать, что в графе Петерсена гамильтонов цикл не существует.

8. (1 балл). Используя необходимые условия (**??**) существования гамильтонова цикла в графе, докажите, что в графе, изображенном на рис.3,a, гамильтонов цикл отсутствует.

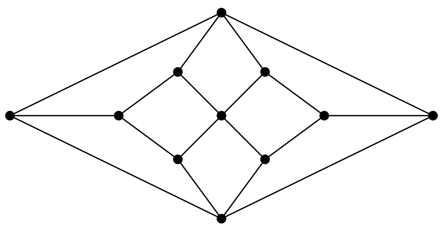


(a)

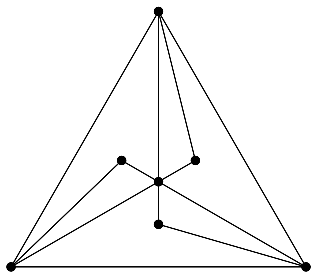


(b)

Рис. 2



(a)



(b)

Рис. 3

9. (1 балл). Рассмотрим граф, изображенный на рис.3,b. Доказать, что в нем существует гамильтонов путь. Проверить для него справедливость достаточных условий (**??**) условия существования гамильтонова цикла в графе. Доказать, что гамильтонов цикл в таком графе не существует.

10. (1 балл) Доказать, что в случае шахматной доски размерами $m \times n$ невозможно конем обойти все клетки доски, проходя каждую клетку лишь один раз и вернувшись в ту клетку, с которой начался обход, в случае, если m и n являются нечетными числами.

11. (1.5 балла). Доказать, что любой сильно связный турнир T, построенный на n вершинах, содержит циклы длины $3, 4, \ldots, n$. Следствием этого утверждения является, в частности, тот факт, что в любом сильно связном графе существует гамильтонов цикл.

12. (2.5 балла). Возможно ли удалить в графе Петерсена ребра так, чтобы в полученном в результате удаления этих ребер связном графе G существовал эйлеров цикл?