Теория категорий

Декартово замкнутые категории

Валерий Исаев

23 марта 2018 г.

План лекции

Булевские объекты

Декартово замкнутые категории

Интерпретация лямбда исчисления

Копроизведение $1 \amalg 1$

- В **Set** множество Bool можно определить как копроизведение множеств $\{\mathrm{true}\}$ и $\{\mathrm{false}\}$, каждое из которых является терминальным.
- Копроизведение $1 \amalg 1$ обычно обозначается как 2.
- Можно было бы в произвольной категории определить объект Bool как копроизведение $1 \amalg 1$.
- Но это недостаточно сильное определение. Мы не сможем никаких функций над ним определить.

Булевский объект

- Пусть в **C** существуют все конечные произведения.
- Тогда *булевский объект* в **C** – это объект Bool вместе с парой морфизмов $\mathrm{true}, \mathrm{false} : 1 \to \mathrm{Bool}$, удовлетворяющий следующему условию.
- Для любых $f, g : A \to B$ существует уникальная стрелка $h : \mathrm{Bool} \times A \to B$, такая что

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\langle \mathrm{true} \circ !_A, id_A \rangle"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Bool} \times A \arrow[d, "h"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\langle \mathrm{false} \circ !_A, id_A \rangle"] \arrow[dr, "g"'] & \mathrm{Bool} \times A \arrow[d, "h"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Булевский объект и 2

- Любой булевский объект является 2.
- Действительно, если в определении булевского объекта в качестве A взять 1, то мы получим в точности универсальное свойство $1 \amalg 1$.
- Следовательно булевский объект уникален с точностью до изоморфизма.
- Но не любой объект, являющийся 2, является булевским.
- Действительно, в категории групп 2 изоморфен 1.
- Но булевский объект изоморфен 1 только в категориях предпорядка.

if

- Мы можем сконструировать морфизм $\mathit{if} : \mathrm{Bool} \times (C \times C) \to C$, удовлетворяющий

$$
\begin{tikzcd}
 & C \times C \arrow[d, "\langle \mathrm{true} \circ !, id \rangle"'] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\
 & \mathrm{Bool} \times (C \times C) \arrow[r, "\mathit{if}"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \times C \arrow[d, "\langle \mathrm{false} \circ !, id \rangle"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
 & \mathrm{Bool} \times (C \times C) \arrow[r, "\mathit{if}"'] & C
\end{tikzcd}
$$

- Действительно, в определении Bool возьмем $A = C \times C$, $B = C$, $f = \pi_1$ и $g = \pi_2$.
- Тогда существует уникальная стрелка $\mathrm{Bool} \times (C \times C) \to C$, удовлетворяющая условиям выше.

План лекции

Булевские объекты

Декартово замкнутые категории

Интерпретация лямбда исчисления

Мотивация

- Очередная конструкция, которую мы хотим обобщить, – это множество/тип функций.
- Эта конструкция называется по разному: экспонента, внутренний *Hom*.
- Пусть A и B – объекты декартовой категории **C**. Тогда экспонента обозначаются либо B^A, либо $[A, B]$.
- Какие операции должны быть определены для B^A.
- Как минимум мы должны иметь аппликацию, которая обычно обозначается ev и является следующим морфизмом:
$$\mathrm{ev} : B^A \times A \to B$$
- Морфизм ev позволяет нам “вычислять” элементы B^A.

Элементы объекта (a side note)

- В категории **Set** элементы множества X соответствуют морфизмам из термнального объекта в X.
- В произвольной категории (с терминальным объектом) мы можем определить элемент объекта таким же образом.
- Но это не очень полезное определение, так как в произвольной категории объект не определяется своими элементами.
- Например, в категории графов морфизмы из терминального графа в граф X соответствуют петлям X.
- Мы можем определить *обощенный элемент* объекта X как морфизм из произвольного объекта Γ в X.
- В категории графов вершины и ребра графа X являются его обобщенными элементами (конечно, существует и много других обобщенных элементов этого графа).

Определение

- Благодаря морфизму ev, мы можем думать об элементах B^A как о морфизмах $A \to B$. Мы еще должны сказать, что B^A содержит *все* такие морфизмы.
- То есть мы должны сказать чему соответствуют обобщенные элементы B^A. Ясно, что у нас должна быть биекция между обобщенными элементами $\Gamma \to B^A$ и морфизмами $\Gamma \times A \to B$.
- Имея морфизм $f : \Gamma \to B^A$, мы можем построить его каррирование следующим образом:

$$\Gamma \times A \xrightarrow{f \times id_A} B^A \times A \xrightarrow{\mathrm{ev}} B$$

- Объект B^A вместе с морфизмом $\mathrm{ev} : B^A \times A \to B$ называется *экспонентой* A и B, если для любого $g : \Gamma \times A \to B$ существует уникальный $f : \Gamma \to B^A$ такой, что композиция стрелок в диаграмме выше равна g.

Примеры

- Категория называется *декартово замкнутой*, если она декартова и для любых ее объектов A и B существует их экспонента B^A.
- **Set** – декартово замкнута. Действительно, B^A – это просто множество функций из A в B.
- **Agda** – декартово замкнута. Действительно, B^A – это просто тип функций из A в B.
- Все алгебраические категории, которые мы рассматривали, не являются декартово замкнутыми (**Grp**, **Vec**, **Ring**, и т.д.).
- Категория графов – декартово замнута.

Объект натуральных чисел

Definition

Объект натуральных чисел в декартово замкнутой категории – это объект $\mathbb{N}$ вместе с парой морфизмов $\mathrm{zero} : 1 \to \mathbb{N}$ и $\mathrm{suc} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющие условию, что для любых других морфизмов $z : 1 \to X$ и $s : X \to X$ существует уникальная стрелка h, такая что диаграмма ниже коммутирует.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\mathrm{zero}"] \arrow[dr, "z"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "\mathrm{suc}"] \arrow[d, dashed, "h"] & \mathbb{N} \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & X \arrow[r, "s"'] & X
\end{tikzcd}$$

Свойства

- Объект натуральных чисел уникален с точностью до изоморфизма.
- В любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел можно определить все примитивно рекурсивные функции.
- Морфизм $\mathrm{suc} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ является расщепленным мономорфизмом.

План лекции

Булевские объекты

Декартово замкнутые категории

Интерпретация лямбда исчисления

Мотивация

- Лямбда исчисление предоставляет синтаксис для (декартово замкнутых) категорий, а категории предоставляют семантику лямбда исчисления.
- С одной стороны, лямбда исчисление позволяет просто описывать различные конструкции в категориях.
- С другой стороны, различные конструкции в категориях могут мотивировать новые языковые конструкции для лямбда исчисления.

Лямбда исчисление как теория

- Для любой (односортной) алгебраической теории можно определить множество термов этой теории, построив его индуктивно из функций этой теории и переменных.
- Например, в теории групп множество термов будет включать такие термы как $x * inv(y)$ и $x * (y * inv(z)) * 1$, где x, y, z – переменные, а $*$, inv и 1 – функции теории групп.
- Типизированное лямбда исчисление можно определить как двусортную алгебраическую теорию.
- Но мы вместо этого просто определим его ручками.
- В лямбда исчислении у нас есть два сорта: сорт типов и сорт термов.

Термы лямбда исчисления

- Типы строятся индуктивно из двух бинарных функций $\times$ и $\to$ и одной константы $\top$ (и переменных).
- Термы строятся индуктивно согласно следующим правилам:

$$\frac{}{\vdash} \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma, x : A \vdash}, x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash x : A}, (x : A) \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathrm{unit} : \top} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash (a, b) : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A \times B}{\Gamma \vdash \mathrm{fst}\, p : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : A \times B}{\Gamma \vdash \mathrm{snd}\, p : B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x. b : A \to B} \qquad \frac{\Gamma \vdash f : A \to B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f\ a : B}$$

Аксиомы лямбда исчисления

Кроме того, у нас есть следующие аксиомы:

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \mathrm{fst}\,(a, b) \equiv a : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \mathrm{snd}\,(a, b) \equiv b : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \top}{\Gamma \vdash \mathrm{unit} \equiv t : \top} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : A \times B}{\Gamma \vdash (\mathrm{fst}\, p, \mathrm{snd}\, p) \equiv p : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (\lambda x.b)\, a \equiv b[x := a] : B} \qquad \frac{\Gamma \vdash f : A \to B}{\Gamma \vdash \lambda x.f\, x \equiv f : A \to B}$$

Интерпретация лямбда исчисления

- Что является моделями алгебраической теории лямбда исчисления (которую мы так и не построили)?
- Это в точности декартово замкнутые категории!
- Так как мы точно не определили эту теорию, то мы и не можем доказать это утверждение, но мы хотя бы можем проинтерпретировать лямбда исчисление в произвольной декартовой категории (так же как термы теории групп можно проинтерпретировать в произвольной группе).
- Пусть **C** – декартово замкнутая категория. Тогда мы будем интерпретировать типы как объекты категории, а термы как ее морфизмы.

Интерпретация типов

- Интерпретацию типов и термов мы будем обозначать как $[\![-]\!]$.
- Тогда типы интерпретируются следующим образом:

$$\begin{aligned} [\![\top]\!] &= 1 \\ [\![A \times B]\!] &= [\![A]\!] \times [\![B]\!] \\ [\![A \to B]\!] &= [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \end{aligned}$$

- Если $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$, то мы можем определить интерпретацию Γ как $[\![\Gamma]\!] = [\![A_1]\!] \times \ldots \times [\![A_n]\!]$.

Интерпретация термов

- Теперь мы определим интерпретацию термов.
- Если $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![a]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$.
- $[\![x_i]\!] = \pi_i$ если $\Gamma = x_1 : A_1, \ldots x_n : A_n$.
- $[\![\mathrm{unit}]\!] =!_{[\![\Gamma]\!]}$.
- $[\![(a, b)]\!] = \langle [\![a]\!], [\![b]\!] \rangle$.
- $[\![\mathrm{fst}\ p]\!] = \pi_1 \circ [\![p]\!]$.
- $[\![\mathrm{snd}\ p]\!] = \pi_2 \circ [\![p]\!]$.
- $[\![f\ a]\!] = \mathrm{ev} \circ \langle [\![f]\!], [\![a]\!] \rangle$, где $\mathrm{ev} : [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \times [\![A]\!] \to [\![B]\!]$.
- $[\![\lambda x.b]\!] = \varphi([\![b]\!])$, где $\varphi : Hom([\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!], [\![B]\!]) \simeq Hom([\![\Gamma]\!], [\![B]\!]^{[\![A]\!]})$ – функция каррирования из определения экспонент.

Проверка аксиом

- Разумеется нам нужно проверить, что эта интерпретация уважает аксиомы.
- Для этого сначала нужно доказать лемму, что подстановка интерпретируется как композиция, то есть если $\Gamma, x : A \vdash b : B$ и $\Gamma \vdash a : A$, то $[\![b[x := a]]\!] = [\![b]\!] \circ \langle id_{[\![\Gamma]\!]}, [\![a]\!] \rangle$. Это легко сделать индукцией по b.
- Теперь бета эквивалентность соответствуют тому, что функция каррирования и обратная к ней дают тождественную функцию при композиции, а эта эквивалентность соответствует тому, что эти функции дают id при композиции в обратном порядке.
- Аксиомы для $\top$ и $\times$ легко следуют из определения произведений.