

# Вопросы к экзамену - теория графов

1. Основные понятия и определения теории графов (неориентированный мультиграф, понятие инцидентности, первая теорема теории графов, принцип double counting, матрица инцидентности; простой граф, примеры простых графов; орграф; понятие смежности в графе и орграфе, матрица и список смежности).
2. Маршруты, пути и циклы в графе. Связность в графе. Расстояние, диаметр, радиус, эксцентриситет графа. Связность в орграфах. Граф компонент сильной связности.
3. Подграф графа. Операции удаления ребра и вершины, остовный и индуцированный подграфы графа. Мосты и точки сочленения в графе. Операции объединения, пересечения, симметрической разности.
4. Изоморфизм и автоморфизм графов (количество простых графов и орграфов, изоморфизм простых графов, помеченные и непомеченные графы, проверка на изоморфность; изоморфизм мультиграфов; определение автоморфизма простого графа, группа автоморфизма, количество различных помеченных графов, отвечающих непомеченному графу).
5. Деревья и их основные свойства. Корневые деревья. Формула Кэли и её доказательство с помощью кода Прюфера.
6. Подсчет остовных деревьев в графе. Матричная теорема о деревьях.
7. Количество основных деревьев и спектр матрицы Лапласа.
8. Подсчет остовных деревьев в орграфе. The BEST theorem.
9. Линейное пространство ребер неориентированного графа. Циклы и разрезы.
10. Гамильтоновы циклы в графе. Необходимые условия существования гамильтонова цикла в графе. Достаточное условие существования в графе гамильтонова цикла. Теорема Оре и ее следствия. Замыкание графа и теорема Бонди-Хватала.
11. Гамильтоновы циклы в орграфах. Два подхода к поиску кратчайшей циклической строки, содержащей все строки данной длины над данным алфавитом. Граф де Брёйна.
12. Циркуляции и напряжения во взвешенных орграфах. Законы Кирхгофа, расчет электрических цепей.

# Вопросы к экзамену - комбинаторика

1. Множества и операции над ними. Разбиение и разделение множеств. Декартово произведение множеств, понятие мультимножества. Основные правила перечислительной комбинаторики. Диаграммы Эйлера-Венна. Принцип включения и исключения.
2.  $k$ -сочетания без повторений. Биномиальные коэффициенты. Формулы суммирования по верхнему индексу и по диагонали. Знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов.  $k$ -сочетания с повторениями.
3.  $k$ -перестановки из  $n$  элементов (с повторениями и без них). Биекция со словами фиксированной длины. Урновые схемы и схемы раскладки предметов по ящикам. Подсчет количества отображений конечных множеств. Количество сюръективных отображений. Формулы обращения.
4. Подсчет количества разделений и упорядоченных разбиений множества  $X$ . Перестановки с повторениями. Раскладки различных предметов по неразличимым ящикам. Числа Стирлинга 2-го рода, рекуррентное соотношение для них. Связь с сюръективными отображениями. Числа Белла, их комбинаторный смысл, выражение через числа Стирлинга 2-го рода. Рекуррентное соотношение для чисел Белла.
5. Понятие рекуррентного соотношения. Основные определения: линейность, однородность, характеристическое уравнение. Методы решения, не использующие производящие функции. Формулы для решения рекуррентных соотношений второго порядка, включая случаи корня кратности два, комплексных корней. Числа Фибоначчи.
6. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами и линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Методы решения неоднородных рекуррентных соотношений.
7. Производящие функции числовых последовательностей. Обыкновенные и экспоненциальные производящие функции. Формальные степенные ряды, их сложение и умножение. Ряды, обратные по отношению к операции умножения.
8. Построение решений линейных рекуррентных соотношений с помощью обыкновенных и экспоненциальных производящих функций.
9. Свертка Дирихле и ряды Дирихле,  $\zeta$ -функция и функция Мебиуса. Частично упорядоченные множества, примеры, диаграммы Хассе. Алгебра инцидентности частично упорядоченного множества,  $\zeta$ -функция и функция Мебиуса. Формулы обращения Мебиуса для частично упорядоченных множеств.
10. Наибольший по включению и максимальный элементы частично упорядоченного множества. Определение решетки,  $\text{join}$  и  $\text{meet}$ . Критерий того, что частично упорядоченное множество является решеткой. Теорема Weisner и ее использование для подсчета всех связных графов.
11. Нелинейные рекуррентные соотношения. Числа Каталана. Различные задачи, связанные с числами Каталана: количество бинарных деревьев, триангуляций, слов Дика. Рекуррентное соотношение и производящая функция для чисел Каталана. Комбинаторное доказательство формулы для чисел Каталана.
12. Принцип инволюции, подсчет чисел Каталана с его помощью. Обобщенный принцип инволюции. Доказательство тождества Вандермонда. Лемма Гессель-Вьенно и ее приложения.