Паросочетания в графах

Домашнее задание №10

17 ноября 2017 г.

Обязательная часть

1. (2 балла). Доказать, что в условиях теоремы Плесника для любого ребра $e \in E(G)$ существует совершенное паросочетание графа G, содержащее e.

2. (1.5 балла). Пусть $G[X, Y]$ есть двудольный граф. Образуем из него граф $\widetilde{G}$ добавлением к Y дополнительной вершины z в случае, если $n = |V(G)|$ есть нечетное число, а также добавлением к Y ребер до превращения его в клику. Доказать, что исходный граф G имеет паросочетание размером $|X|$ тогда и только тогда, когда в $\widetilde{G}$ существует совершенное паросочетание.

3. (1.5 балла). Пусть P есть частично упорядоченное множество, в котором самая длинная цепь имеет длину, равную m. Доказать теорему Мирского, утверждающую, что все P можно представить в виде объединения m попарно не пересекающихся между собой антицепей. Иными словами, доказать, что наибольшее количество m элементов в цепи совпадает с минимальным количеством антицепей, покрывающих все элементы множества P.

4. (1 балл). Пусть $D_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ есть множество натуральных чисел. Известно, что среди любых трех из них всегда можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Доказать, что эти числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось бы на другое. Обобщить данный результат на случай, когда среди любых m чисел можно выбрать ровно два числа, одно из которых делилось бы на другое.

5. (1 балл). В группе имеются шесть студентов. Известно, что первый и третий студенты вместе работают над научным проектом, второй и четвертый вместе посещают спецкурс, первый, второй и пятый вместе занимаются спортом, третий и пятый вместе ходят на занятия по английскому языку, и, наконец, пятый и шестой студенты вместе играют в компьютерные игры. Оказалось, что в один из дней все эти дела нужно провести одновременно. Можно ли так распределить студентов по занятиям, чтобы каждое из этих дел не сорвалось?

6. (1 балл). Пусть $A := (A_1, \ldots, A_m)$ есть набор из m подмножеств n-элементного множества Y. Системой различных представителей для A называется подмножество $\{a_, \ldots, a_m\}$ различных элементов $a_i \in A$, таких, что для любого i элемент $a_i \in A_i$. Доказать, что A обладает такой системой тогда и только тогда, когда $| \cup_{i \in S} A_i| \geqslant |S|$ для любого подмножества $S \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$.

7. (1.5 балла). Матрицей P перестановок называется квадратная бинарная матрица, в которой ровно одна единица стоит в каждой строке и в каждом столбце. Любая такая матрица является, по сути, матричным представлением некоторой перестановки σ. Доказать, что любая квадратная матрица $n \times n$, состоящая из неотрицательных целых чисел, выражается в виде суммы k матриц перестановок тогда и только тогда, когда сумма чисел в любой строке, а также сумма чисел в любом столбце равны k.

8. (1.5 балла). Дважды стохастической матрицей Q называется вещественная неотрицательная матрица, в которой сумма чисел в любой строке и сумма чисел в любой строке равняется единице. Доказать, что любая такая матрица Q представима в виде линейной комбинации
$$Q = c_1 \cdot P_1 + \ldots + c_m \cdot P_m,$$
где P_i — матрицы перестановок, c_i — вещественные неотрицательные числа, сумма которых равна единице.