Курс: Типы в языках программирования
Практика 7. Система $\lambda 2$ (System F)

Подразумевается, что мы работаем в системе $\lambda 2$ в стиле Черча, если явно не указано иное.

Разминка

▶ Найдите замкнутую версию комбинаторов **S** и **B** и запишите их тип. Сколько разных версий можно написать для этих комбинаторов?

▶ Определите тип терма
$\lambda x^{\perp}.\, x\,(\perp\to\perp\to\perp)\,(x\,(\perp\to\perp)\,x)\,(x\,(\perp\to\perp\to\perp)\,x\,x)$.

▶ Придумайте контекст Γ, в котором верны утверждения типизации

$$
\begin{array}{lcl}
\Gamma & \vdash & x : \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,\beta : \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,\beta : (\beta\to\beta)\to\beta \\
\Gamma & \vdash & x\,((\beta\to\beta)\to\beta)\,(x\,(\beta\to\beta)) : \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,(\beta\to\beta)\,(x\,\beta) : \beta \\
\Gamma & \vdash & x\,(\beta\to\beta)\,(x\,\beta) : \beta\to\beta \\
\Gamma & \vdash & x\,(\beta\to\beta\to\beta)\,(x\,\beta)\,(x\,\beta) : \beta\to\beta\to\beta
\end{array}
$$

Стандартные типы

▶ Каков тип булевых значений (`Bool`)

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{tru} & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, t^{\alpha}\, f^{\alpha}.\, t \\
\texttt{fls} & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, t^{\alpha}\, f^{\alpha}.\, f
\end{array}
$$

▶ Реализуйте комбинаторы `not`, `ifThenElse`, `and` и укажите их типы.

▶ Тип чисел Черча `Nat` $= \forall\alpha.\,(\alpha\to\alpha)\to\alpha\to\alpha$:

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{0} & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, s^{\alpha\to\alpha}\, z^{\alpha}.\, z \\
\texttt{1} & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, s^{\alpha\to\alpha}\, z^{\alpha}.\, s\, z \\
\texttt{2} & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, s^{\alpha\to\alpha}\, z^{\alpha}.\, s\,(s\, z) \\
\texttt{3} & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, s^{\alpha\to\alpha}\, z^{\alpha}.\, s\,(s\,(s\, z)) \\
\texttt{4} & \equiv & \Lambda\alpha.\,\lambda\, s^{\alpha\to\alpha}\, z^{\alpha}.\, s\,(s\,(s\,(s\, z))) \\
 & \dots &
\end{array}
$$

▶ Заполните пропуски типами и укажите тип комбинатора

$$\mathtt{iszro} \;\equiv\; \lambda\, n^{\mathtt{Nat}}.\, n\, [\bullet]\, (\lambda\, x^{[\bullet]}.\, \mathtt{fls})\; \mathtt{tru}$$

▶ Определим комбинатор следования так

$$\mathtt{succ} \;\equiv\; \lambda n^{\mathtt{Nat}}.\, \Lambda\beta.\, \lambda s^{\beta\to\beta}.\, \lambda z^{\beta}.\, s\,(n\,\beta\, s\, z)$$

Проверьте, что (1) его тип $\mathtt{Nat}\to\mathtt{Nat}$; (2) $\mathtt{succ}\ 0 =_\beta 1$ и $\mathtt{succ}\ 1 =_\beta 2$.
▶ Определим комбинатор сложения так

$$\mathtt{plus} \;\equiv\; \lambda m^{\mathtt{Nat}} n^{\mathtt{Nat}}.\, \Lambda\beta.\, \lambda s^{\beta\to\beta}.\, \lambda z^{\beta}.\, m\,\beta\, s\,(n\,\beta\, s\, z)$$

Проверьте, что (1) его тип $\mathtt{Nat}\to\mathtt{Nat}\to\mathtt{Nat}$; (2) $\mathtt{plus}\ 1\ 1 =_\beta 2$.
▶ Бестиповой комбинатор умножения определялся одним из следующих способов

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{mult1} & \equiv & \lambda m\, n.\, m\,(\mathtt{plus}\ n)\ 0 \\ \mathtt{mult2} & \equiv & \lambda m\, n\, s\, z.\, m\,(n\, s)\, z \\ \mathtt{mult3} & \equiv & \lambda m\, n\, s.\, m\,(n\, s) \end{array}$$

Типизируйте эти определения в $\lambda 2$ в стиле Черча.
▶ Заполните пропуски типами и укажите тип комбинатора

$$\mathtt{pow} \;\equiv\; \lambda m^{\mathtt{Nat}}\, n^{\mathtt{Nat}}.\, \Lambda\beta.\, n\,[\bullet]\,(m\,[\bullet])$$

Почему этот комбинатор не имел типа в системе $\lambda_\to$?

▶ Каков тип пар ($\mathtt{Pair}\sigma\tau$)

$$\mathtt{pair} \;\equiv\; \lambda\, x^{\sigma}.\, \lambda\, y^{\tau}.\, \Lambda\alpha.\, \lambda\, f^{\sigma\to\tau\to\alpha}.\, f\, x\, y$$

▶ Реализуйте комбинаторы `fst`, `snd` и укажите их тип.
▶ Каков тип суммы типов ($\mathtt{Either}\sigma\tau$)? Реализуйте термы описывающие его введение и удаление.
▶ Каков тип списка ($\mathtt{List}\sigma$)? Реализуйте термы описывающие его введение и удаление.

Примитивная рекурсия

Напомним реализацию функция предшествования для чисел Черча:

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{zp} & \equiv & \mathtt{pair}\ 0\ 0 \\ \mathtt{sp} & \equiv & \lambda p.\, \mathtt{pair}\ (\mathtt{snd}\ p)\ (\mathtt{succ}\ (\mathtt{snd}\ p)) \\ \mathtt{pred} & \equiv & \lambda m.\, \mathtt{fst}\ (m\ \mathtt{sp}\ \mathtt{zp}) \end{array}$$

▶ Типизируйте комбинаторы $\mathtt{zp}$, $\mathtt{sp}$ и $\mathtt{pred}$.

Обобщение предыдущей схемы дает комбинатор примитивной рекурсии

$$\begin{array}{lcl}
\mathtt{xz} & \equiv & \lambda x.\, \mathtt{pair}\; x\; \mathtt{0} \\
\mathtt{fs} & \equiv & \lambda f\, p.\, \mathtt{pair}\; (f\; (\mathtt{fst}\; p)\; (\mathtt{snd}\; p))\; (\mathtt{succ}\; (\mathtt{snd}\; p)) \\
\mathtt{rec} & \equiv & \lambda m\, f\, x.\, \mathtt{fst}\; (m\; (\mathtt{fs}\; f)\; (\mathtt{xz}\; x))
\end{array}$$

▶ Типизируйте комбинаторы $\mathtt{xz}$, $\mathtt{fs}$ и $\mathtt{rec}$.

Кодирование «квантора существования» (Σ-типа)

Пусть имеется произвольный тип σ, такой что $\alpha \in \mathsf{FV}(\sigma)$. Введем типовую конструкцию

$$\exists \alpha.\, \sigma \;\equiv\; \forall \beta.\, (\forall \alpha.\, \sigma \to \beta) \to \beta$$

Терм, который населяет обозначим

$$\langle \gamma, y \rangle \;\equiv\; \Lambda \beta.\, \lambda x^{\forall \alpha.\, \sigma \to \beta}.\, x\, \gamma\, y$$

▶ Какой тип имеет y в этом выражении?
▶ (*) Попробуйте найти правило удаления для $\exists \alpha.\, \sigma$.

Связь систем Карри и Черча

▶ В системе $\lambda 2$ «поднимите», атрибутировав типами, терм в стиле Карри в систему Чёрча

$$\vdash \lambda f.\, f\, f\, f : \top \to \top$$

сохранив при этом имеющуюся типизацию (здесь $\top \equiv \forall \alpha.\, \alpha \to \alpha$). Попробуйте дать два решения.
▶ В системе $\lambda 2$ «поднимите», атрибутировав типами, терм в стиле Карри в систему Чёрча

$$\vdash \lambda f.\, f\, f\, f : \mathtt{Bool} \to \mathtt{Bool}$$

сохранив при этом имеющуюся типизацию (здесь $\mathtt{Bool} \equiv \forall \alpha.\, \alpha \to \alpha \to \alpha$). Попробуйте дать два решения.
▶ В системе $\lambda 2$ «поднимите», атрибутировав типами, терм в стиле Карри в систему Чёрча

$$\vdash \lambda f.\, (f\, f)\, (f\, f) : \top \to \top$$

сохранив при этом имеющуюся типизацию (здесь $\top \equiv \forall\alpha.\, \alpha \to \alpha$). Попробуйте найти два решения.

▶ В системе $\lambda 2$ «поднимите», атрибутировав типами, терм в стиле Карри в систему Чёрча

$$\vdash \lambda \mathsf{f}.\, (\mathsf{f}\,\mathsf{f})\,(\mathsf{f}\,\mathsf{f}) : \bot \to \bot$$

сохранив при этом имеющуюся типизацию (здесь $\bot \equiv \forall\alpha.\, \alpha$). Попробуйте найти два решения.

▶ В системе $\lambda 2$ «поднимите», атрибутировав типами, терм в стиле Карри в систему Чёрча

$$\vdash \lambda \mathsf{f}.\, \mathsf{f}\,\mathsf{f} : \mathtt{Bool} \to \mathtt{Bool} \to \mathtt{Bool}$$

сохранив при этом имеющуюся типизацию (здесь $\mathtt{Bool} \equiv \forall\alpha.\, \alpha \to \alpha \to \alpha$).

▶ В системе $\lambda 2$ «поднимите», атрибутировав типами, терм в стиле Карри в систему Чёрча

$$\vdash \lambda \mathsf{f}.\, \mathsf{f}\,\mathsf{f}\,\mathsf{f} : \bot \to \bot$$

сохранив при этом имеющуюся типизацию (здесь $\bot \equiv \forall\alpha.\, \alpha$). Попробуйте найти два разных решения.