

Домашнее задание 2. Основы перечислительной комбинаторики.

Группа 102/3

Количество баллов на зачёт: 8,5

1. (1 балл) Сколько чисел в диапазоне от 0 до 999 999 не содержат двух рядом стоящих одинаковых цифр?
2. (1 балл) Переплётчик должен переплести 12 книг в красный, синий и коричневый цвета. Сколько имеется способов это сделать, если в каждый из трех цветов должна быть переплетена хотя бы одна книга?
3. (1 балл) Сколькими способами из доски 7×7 можно выбрать 4 клетки, являющиеся вершинами некоторого прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам доски?
4. (1,5 балла) Квадрат разделён на 16 одинаковых квадратов. Сколькими способами можно раскрасить эти квадраты в белый, чёрный, красный и синий цвета так, чтобы в каждом горизонтальном и каждом вертикальном ряду были все четыре цвета?
5. (2 балла) Докажите комбинаторно следующее равенство:

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}.$$

6. (2 балла) Докажите комбинаторно следующее тождество:

$$\binom{\binom{n+1}{k}}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{\binom{n}{k-i}}{k-i}.$$

С его помощью докажите справедливость равенства

$$\binom{n+k}{n+1} = \sum_{i=0}^k \binom{n+k-i-1}{n}.$$

7. (1 балл) Рота состоит из трех офицеров, шести сержантов и шестидесяти рядовых. Сколько существует различных способов сформировать отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и двадцати рядовых?
8. (1,5 балла) Сколько существует бинарных (т.е. состоящих из цифр 0 и 1) строк длины n , содержащих ровно k единиц? А бинарных строк длины n , содержащих k единиц и таких, в которых никакие две единицы не стоят рядом?
9. (1 балл) Сколько чисел, меньших миллиона, можно записать с помощью цифр 8 и 9?
10. (1 балл) В алфавите племени Бум-Бум всего шесть букв. Любое слово состоит у них из шести символов, причем в каждом таком слове должны быть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько всего слов в языке племени Бум-Бум?