Производящие функции и формальные степенные ряды (ДЗ)

17 апреля 2017 г.

1. Пусть
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n.$$
есть производящая функция для числовой последовательности $\{a_n\}$. Выразить через $f(z)$ производящие функции для последовательностей
$$b_n = a_n + a_{n+1}, \qquad c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i, \qquad d_n = \alpha^n \cdot a_n, \qquad e_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k+1; \\ a_n, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

2. Известно, что экспоненциальные производящие функции $F(z)$ и $G(z)$ для числовых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ соответственно связаны соотношением $G(z) = F(z)/(1-z)$. Выразите b_n через a_n.

3. Рассмотрим следующие обыкновенные производящие фукнции:
$$g(z) = 1 - z - 6z^2, \qquad h(z) = 1 + 3z.$$
Получить явный вид коэффициентов f_n производящей функции $f(z)$, связанной с $g(z)$ и $h(z)$ равенством
$$f(z) \cdot g(z) = h(z).$$

4. Выразить через обыкновенную производящую функцию $g(z) = 1 - z$ производящие функции для числовых последовательностей
$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4\ \ldots;$$
$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots.$$

5. Используя определение произведения обыкновенных производящих функций, вычислить сумму

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} 4^{-k}.$$

6. Используя определение произведения экспоненциальных производящих функций, вычислить сумму

$$s_n(r) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} r^{n-k}.$$

7. Показать, что коэффициенты c_n у получающейся в результате перемножения двух функций

$$f(z) = \frac{a_1}{1^z} + \frac{a_2}{2^z} + \frac{a_3}{3^z} + \ldots \qquad \text{и} \qquad g(z) = \frac{b_1}{1^z} + \frac{b_2}{2^z} + \frac{b_3}{3^z} + \ldots$$

функции $h(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^z}$ рассчитываются по формулам

$$c_n = \sum_{d \backslash n} a_d b_{n/d}. \tag{1}$$

8. Пусть δ_n есть количество делителей d числа n. Обозначим через $\delta(z)$ функцию Дирихле, отвечающую этой числовой последовательности $(\delta_1, \delta_2, \ldots)$. Выразить $\delta(z)$ через ζ-функцию Римана.