

## Логика высказываний.

1. Приведите к КНФ формулы (i)  $\neg((p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$   
(ii)  $p \vee (\neg q \wedge (r \rightarrow \neg p))$   
(iii)  $\neg(\(((a \rightarrow b)) \rightarrow a) \rightarrow a)$   
(iv)  $\neg(a \vee (a \rightarrow b))$
2. Постройте преобразование КНФ формулы в формулу ДНФ пользуясь дистрибутивностью. Если формула в КНФ содержала  $m$  дизъюнктов (кловов) каждый содержащий 3 литерала, то сколько дизъюнкций будет использовано в эквивалентной ДНФ?
3. Две формулы, содержащие только переменные и связки  $\vee$ ,  $\wedge$  и  $\neg$  эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду  $\vee$  заменить на  $\wedge$  и наоборот.
4. Приведите пример булевой функции от  $n$  аргументов, у которой любая дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены (дизъюнкты или конъюнкты) длины  $n$ .
5. (i) Докажите, что если пропозициональная формула использует только связки  $\wedge$  и  $\vee$ , то задаваемая ей булева функция монотонна.  
(ii) Докажите, что монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки  $\wedge$  и  $\vee$ .
6. Пусть формула  $\phi \rightarrow \psi$  является тавтологией. Докажите, что найдется такая формула  $\tau$ , которая содержит только общие для  $\phi$  и  $\psi$  переменные, что формулы  $\phi \rightarrow \tau$  и  $\tau \rightarrow \psi$  являются тавтологиями.
7. Пусть  $F$  — произвольное поле. Назовём мультилинейной функцией полином от  $n$  переменных с коэффициентами из  $F$ , в котором все показатели степеней равны либо 0, либо 1. (Таким образом, каждый моном в ней есть произведение коэффициента и некоторого набора переменных без повторений.) Будем рассматривать  $B = \{0, 1\}$  как подмножество  $F$ . Докажите, что всякая булева функция  $B^n \rightarrow B$  однозначно продолжается до мультилинейной функции  $F^n \rightarrow F$ , и коэффициенты мультилинейной функции можно считать целыми числами.